תרגיל רדיקלי

0. בהנחה שהמרובעים $ABCD, CDEF, EFAB$ חסומים, האם בהכרח המשושה $ABCDEF$ חסום?

1. במרובע חסום $ABCD$ מתקיים $\sphericalangle A = 90^\circ = \sphericalangle C$. המעגל שקוטרו AB פוגש את המעגל שקוטרו CD בנקודות X ו-Y. הראו שהישר XY עובר דרך אמצע של אחד האלכסונים.

2. במשולש ABC הגבהים הם AA_1, BB_1, CC_1. הישרים AB ו-A_1B_1 נפגשים בנקודה C_2, הישרים AC ו-A_1C_1 נפגשים ב-B_2, הישרים BC ו-B_1C_1 נפגשים ב-A_2. הראו שהנקודות A_2, B_2 ו-C_2 נמצאות על ישר אחד, שמאונך ליישר אוילר של ABC.

2'. אם בשאלה הקודמת ניקח "חוצי הזוויות" במקום "הגבהים", גם אז נקבל 3 נקודות על ישר אחד, אבל הפעם הישר מאונך לישר שמחבר את מרכז המעגל החסום עם מרכז המעגל החוסם.

3. מעגל ω מאונך למעגלים α, β ו-γ, שכל אחד מהם פוגש אותו בשתי נקודות. נסמן ב-a את המיתר המשותף של ω ו-α, ב-b את המיתר המשותף של ω ו-β, וב-c את המיתר המשותף של ω ו-γ. הראו שאם ל-α, β ו-γ יש נקודה משותפת, אז גם ל-a, b ו-c יש נקודה משותפת.

4. הראו כי שתי נקודות אפולוניוס של משולש ABC ונקודת מפגש התיכושקפים נמצאים על ישר אחד, ומצאו עוד נקודה מפורסמת רביעית על ישר זה שמשלימה את השלישייה לרביעייה הרמונית.

5. במישור של משולש ABC נבחרה נקודה נוספת D (לא על הצלעות). הנקודה A' נמצאת על BC, והזווית $\sphericalangle ADA'$ ישרה. באופן דומה מגדירים נקודות B' ו-C'. הוכיחו כי A', B' ו-C' נמצאות על ישר אחד.

6. המעגל החסום ב-ABC משיק לצלעות AB ו-AC בנקודות Z ו-Y בהתאמה. הישרים BY ו-CZ נפגשים ב-G, ונקודות R ו-S נבחרו כך, שהמרובעים $BCYR$ ו-$BCSZ$ הם מקביליות. הוכיחו כי $GR = GS$.

7. במשולש ABC מרכז המעגל החסום I, מרכז המעגל החוסם O. אמצעים הקשתות BC ו-BAC על המעגל החוסם הם A_1 ו-A_2 בהתאמה. האנך מ-A_1 לישר A_2I פוגש את הישר BC בנקודה A'. באופן דומה מגדירים את B' ואת C'. הראו כי A', B' ו-C' נמצאות על ישר אחד, שמאונך לישר OI.