תרגיל מספרים

1. הראו שלכל p ראשוני אי-זוגי מתקיים $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}=2^p+1\left(\mathrm{mod}\,p^2\right)$.

2. מצאו את כל השלשות m,n,p כאשר m,n שלמים חיוביים, p ראשוני,

א. כך שמתקיים $p^m-n^3=8$,

ב. $2^m p^2+1=n^5$

3. מספרים m,n טבעים, והמספר $A=\frac{\left(m+3\right)^n+1}{3m}$ הוא שלם. הראו כי A אינו זוגי.

4. מצאו את כל הרשימות של המספרים הטבעיים $n_1,n_2,n_3,...,n_k$ כך שמתקיים

$$n_2\mid 2^{n_1}-1,\ n_3\mid 2^{n_2}-1,\ \ldots,\ n_k\mid 2^{n_{k-1}}-1,\ n_1\mid 2^{n_k}-1.$$

5. מצאו את כל השלשות של מספרים שלמים x,y,z שמקיימים

$$x^3+y^3+z^3=3=x+y+z.$$

6. מצאו את כל השלשות של מספרים טבעיים המקיימים $c^{a+b}=a^b\cdot b$.

7. תהא $\mathbb{N}_0$ קבוצת המספרים השלמים אי-שליליים. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שמקיימות $f\left(m+f\left(n\right)\right)=f\left(f\left(m\right)\right)+f\left(n\right)$, לכל $m,n\in\mathbb{N}_0$.

8. מצאו את כל זוגות הטבעיים $\left(x,y\right)$ עבורם $\left(x+y\right)\left(1+xy\right)$ הוא חזקת 2.

9. מצאו את כל המספרים הטבעיים N כך שכל מספר N-ספרתי שיש לו ספרה 7 באחד המקומות וכל ספרותיו האחרות הן אחידות יהיה בהכרח ראשוני.

10. הראו שכל מספר רציונאלי חיובי ניתן להציג בתור $\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$ כאשר a,b,c,d מספרים טבעיים.