הגדרה: עבור תת-קבוצה A של טבעיים נגדיר $\mathrm{mex}(A)=\min\{x\in\mathbb{N}\mid x\notin A\}$ ($\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$)

הערה: את ההגדרה אפשר להכליל לכל הסודרים (במקום רק סודרים סופיים)

נחשוב על משחק כעל קבוצת מצבים שאליהם אפשר להגיע מהמצב הנוכחי.

(נדבר רק על משחקים שוויוניים, בהם ל-2 השחקנים יש אותה קבוצת מהלכים אפשריים, והשחקן שאין לו מהלך חוקי - מפסיד)

הגדרה: סכום של 2 משחקים הוא משחק בו בכל תור שחקן בוחר את אחד המשחקים ועושה בו מהלך.
כלומר בשפה פורמלית: $A+B=\{a+B\mid a\in A\}\cup\{A+b\mid b\in B\}$.

הגדרות: משחק A נקרא מנצח אם השחקן הראשון מנצח (כלומר קיימת אסטרטגית ניצחון לראשון), ומפסיד אם השחקן הראשון מפסיד (כלומר קיימת אסטרטגית ניצחון לשני).

נגיד ש-A דומה ל-B אם שני המצבים (משחקים) מנצחים או שניהם מפסידים. נסמן $A\sim B$.

נגיד שמשחקים A ו-B שקולים כאשר לכל משחק C מתקיים $A+C\sim B+C$. נסמן $A\equiv B$.

יחס זה הוא יחס שקילות על משחקים, ולכל משחק נרצה להבין לאיזו מחלקה הוא שייך. נרצה גם למצוא נציג מינימאלי מכל מחלקה.

הגדרה: $\mathrm{nim}(A)=\mathrm{mex}\{nim(a)\mid a\in A\}$. נסמן בקצרה $|A|=\mathrm{nim}(A)$.

מספר זה נקרא הנימבר של המשחק (או מצב) A .

טענה: A מפסיד $\Leftrightarrow |A|=0$.

הוכחה: $|A|=0\Leftrightarrow\forall B\in A.|B|>0\Leftrightarrow\forall B\in A.\exists C\in B.|C|=0$, כלומר לכל מהלך של שחקן ראשון, קיים מהלך של שחקן שני שמחזיר את הנימבר של המשחק ל-0. זו אסטרטגיית ניצחון עבור השחקן השני.

אם $|A|>0$ אז אותה אסטרטגיה תעבוד עבור השחקן הראשון.

מסקנה: A מנצח $\Leftrightarrow |A|>0$.

טענה: $|A+A|=0$

הוכחה: נראה כי $A+A$ מפסיד באינדוקציה על A (או על כמות מהלכים ב-A): לכל מהלך של ראשון $a+A\in A+A$ קיים מהלך של שני $a+a\in a+A$, והמצב $a+a$ מפסיד. ($\varnothing=\varnothing+\varnothing$ מפסיד)

טענה (הכללה): $|A|=|B|\Leftarrow|A+B|=0$

הוכחה: וכיח באינדוקציה: נניח לה"כ שהתבצע מהלך ל-$a+B$. $|a|\neq|A|=|B|$ ולכן, אם $|a|>|B|$ אז קיים $a_1\in a$ כך ש-$|a_1|=|B|$ ולכן $|a_1+B|=0$. אם $|a|<|B|$ אז קיים $b\in B$ כך ש-$|a|=|b|$, ולכן גם $|a+b|=0$. נבדוק גם בסיס אינדוקציה: $|\varnothing+\varnothing|=0$

בינתיים דיברנו על האם משחק הוא מנצח או מפסיד, כעת ננסה להבין מה קורה עם הערכים של הנימברים.

טענה: $|A|=0 \Leftarrow |A+B|=|B|$

הוכחה: $\forall a\in A.\exists a_0\in a.|a_0|=0$ לכן (a_0 בגלל ש- קטן יותר מ-A)
$\forall a+B\in A.\exists a_0+B\in a+B.|a_0+B|=|B|$ ולכן מתקיים $\forall a+B\in A.|a+B|\neq |B|$. מצד שני
$\forall b\in B.|A+b|=|b|\neq |B|$ ולכן גם $\forall n<|B|.\exists b\in B.|A+b|=n$. מכאן
$|A+B|=\operatorname{mex}\left(\{|a+B|\mid a\in A\}\cup\{|A+b|\mid b\in B\}\right)=|B|$.

טענה: $|A|=|B| \Leftrightarrow \forall C.|A+C|=|B+C|$

הוכחה: $|A|=|B| \Leftarrow |A+B|=0 \Leftarrow |A+B+A+C|=|A+C|$, אבל מצד שני $|A+A|=0$ ולכן
$|A+B+A+C|=|B+C|$.

מסקנה: $|A+B|=0 \ |A|=|A+A+B|=|B| \Leftarrow$

מסקנה 2: אם $|A|=|B|$, $|C|=|D|$, אז $|A+C|=|A+D|=|B+D|$.

מכאן $|A+B|$ תלוי רק ב-$|A|,|B|$, ולא תלוי במשחקים עצמם. נסמן $|A|\oplus|B|=|A+B|$.

משפט: $A\equiv B \Leftrightarrow |A|=|B|$.

הוכחה: קודם כל: $A\equiv B \Leftrightarrow \forall C.\left(|A+C|=0\leftrightarrow|B+C|=0\right) \Leftrightarrow \forall C.A+C\sim B+C$

מצד שני: $|A|=|B| \Leftrightarrow \forall C.|A+C|=|B+C|$

$\forall C.|A+C|=|B+C| \Leftarrow \forall C.\left(|A+C|=0\leftrightarrow|B+C|=0\right)$ ברור.

$|B+A|=0 \Leftarrow \left(|A+A|=0\leftrightarrow|B+A|=0\right) \Leftarrow \forall C.\left(|A+C|=0\leftrightarrow|B+C|=0\right)$.

כעט נרצה גם לדעת לחשב את $|A|\oplus|B|=|A+B|$. נוכיח באינדוקציה כי זו פעולת הקסור.

נראה כי $2^n\oplus 2^m=2^n+2^m$ כאשר $m\neq n$ (נזכר גם כי $2^n\oplus 2^n=0$)

נוכיח באינדוקציה על m,n. נניח לה"כ כי $n>m$.

$$2^n\oplus 2^m=\operatorname{mex}\left(\left\{x\oplus 2^m\mid x<2^n\right\}\cup\left\{x\oplus 2^n\mid x<2^m\right\}\right)=$$
$$=\operatorname{mex}\left(\left\{x\mid x<2^n\right\}\cup\left\{x\mid 2^n\le x<2^m+2^n\right\}\right)=\operatorname{mex}\left(\left\{x\mid x<2^m+2^n\right\}\right)=2^m+2^n$$