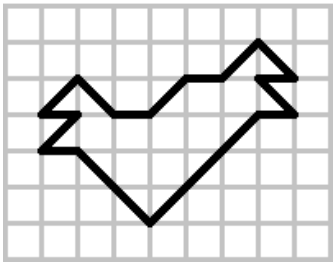
19/2/2017 **מחנה חורף** כ"ג בשבט תשע"ז

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון



1. חלקו את הצורה ל-7 חלקים שווים.

2. האם יתכן שמספר 100-ספרתי ברישום עשרוני, שברישום שלו משתמשים ב-3 ספרות בלבד, הוא ריבוע של מספר שלם?

3. על הלוח רשומים 15 מספרים: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{15}$. בכל מהלך בוחרים באקראי שלושה מספרים a,b,c שרשומים על הלוח, מוחקים אותם וכותבים על הלוח מספר נוסף שהוא $\frac{abc}{\sqrt[3]{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}}$. לאחר 7 מהלכים יישאר רק מספר אחד על הלוח. מצאו את המספר הגדול ביותר והמספר הקטן ביותר שיכול להתקבל בסוף.

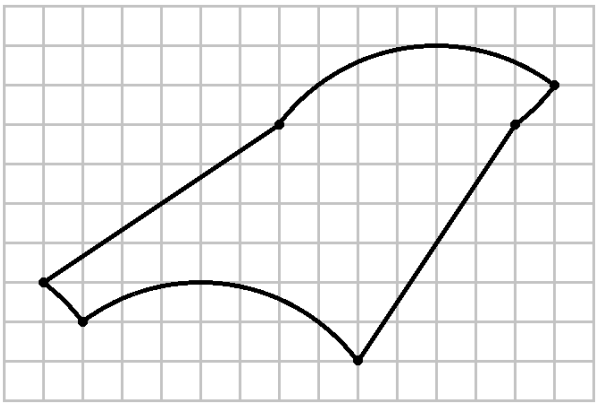
4. במרובע ABCD חסום מעגל שמרכזו O ורדיוסו R. נתון כי $\frac{1}{AO^2}+\frac{1}{CO^2}=\frac{1}{R^2}$.
הוכיחו כי $\frac{1}{BO^2}+\frac{1}{DO^2}=\frac{1}{R^2}$.

5. לצייר מודרני יש לוח משבצות 10×10 ו-3 צבעים. בכל שלב ושלב הוא יכול לצייר ריבוע כחול 1×1, ירוק 2×2 או אדום 3×3. כל ריבוע כזה מורכב ממשבצות שלמות. לפי חוקי האסטטיקה, אסור לשני ריבועים באותו צבע לגעת בצלע או בקודקוד, ואסור לצבוע משבצת כלשהי יותר מפעם אחת.
א. האם יתכן שבציור יישארו פחות מ-15 משבצות לבנות?
ב. האם יתכן שבציור יישארו פחות מ-5 משבצות לבנות?
ג. נסו להגיע לציור עם כמה שפחות משבצות לבנות.

בהצלחה!

19/2/2017 **מחנה חורף** כ"ג בשבט תשע"ז

קבוצת רותם



1. גבול הצורה בציור מורכב משני קטעים ישרים ו-4 קשתות מעגליות, שנוצרו ממעגלים שאורך הרדיוס שלהם שווה ל-5. חלקו את הצורה לשני חלקים שווים.

2. במשולש ABC חסום מעגל, שמשיק לצלעותיו בנקודות D, E ו-F (שהן על הצלעות BC, AC ו-AB בהתאמה). הישר AD פוגש את המעגל שנית בנקודה P. הישרים BP ו-CP פוגשים את המעגל שנית בנקודות M ו-N. הישר NB פוגש את המעגל שנית בנקודה Z. הראו שהישרים AD, MN ו-EZ נפגשים בנקודה אחת.

3. לצייר מודרני יש לוח משבצות 10×10 ו-3 צבעים. בכל שלב ושלב הוא יכול לצייר ריבוע כחול 1×1, ירוק 2×2 או אדום 3×3. כל ריבוע כזה מורכב ממשבצות שלמות. לפי חוקי האסטטיקה, אסור לשני ריבועים באותו צבע לגעת בצלע או בקודקוד, ואסור לצבוע משבצת כלשהי יותר מפעם אחת. נסו להגיע לציור עם כמה שפחות משבצות לבנות (ניקוד חלקי יינתן על תוצאות חלקיות וחסמים).

4. א. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $f\left(x\cdot f\left(y\cdot f\left(xy\right)\right)\right)=x^2y^2$ לכל x,y ממשיים.

ב. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות

$$f\left(x\cdot f\left(y\cdot f\left(x\cdot f\left(y\right)\right)\right)\right)=x^2y^2$$

לכל x,y ממשיים.

בהצלחה!

20/2/2017 **מחנה חורף** כ"ד בשבט תשע"ז

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את כל הזוגות של מספרים שלמים חיוביים m,n כך ש-$3m+3n+1$ מתחלק ב-$m\cdot n$.

2. בעמק קסום חיים 5777 דרקונים. כל שני דרקונים עשו פעם קרב (אחד בדיוק), ובכל קרב כזה דרקון אחד ניצח, ואחר הפסיד, ומאז הוא מפחד מהדרקון שניצח אותו.
הוכיחו שאם אי-אפשר להושיב את כל הדרקונים במעגל כך שכל דרקון מפחד מדרקון שלידו, אז אפשר לחלק את כל הדרקונים לשתי להקות α ו-β (קבוצות לא ריקות) כך שכל דרקון מלהקה β מפחד מכל דרקון מלהקה α.

3. בתוך המקבילית ABCD נמצאים שני מעגלים k ו-m שנחתכים בנקודות X ו-Y. מעגל k משיק לצלעות AB ו-AD בנקודות P ו-Q בהתאמה, והמעגל m משיק לצלעות BC ו-CD בנקודות T ו-S. הראו שאם PT עובר דרך X, אז SQ עובר דרך Y.

4. הוכיחו כי לכל 3 מספרים חיוביים a,b ו-c מתקיים

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}+3\left(\frac{a+b}{2c}+\frac{a+c}{2b}+\frac{b+c}{2a}\right)+$$
$$+32\left(\frac{abc}{(a+b)^3}+\frac{abc}{(a+c)^3}+\frac{abc}{(b+c)^3}\right)\geq 24$$

בהצלחה!

20/9/2016 **מחנה חורף** כ"ד בשבט תשע"ז

קבוצת רותם

1. מצאו את המספר הממשי הקטן ביותר C כך לכל 5 מספרים חיוביים a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ניתן לבחור 4 אינדקסים שונים i,j,k,ℓ כך שיתקיים $\left|\frac{a_i}{a_j}-\frac{a_k}{a_\ell}\right|\le C$.

2. על הלוח מצויר מצולע משוכלל בעל n צלעות. מקס רוצה להעביר מספר אלכסונים במצולע זה. כל שני אלכסונים שהוא מעביר שנחתכים בנקודה פנימית חייבים להיות מאונכים. מהו הכמות הגדולה ביותר של אלכסונים שהוא יכול להעביר?

3. נסמן ב-$\mathbb{N}$ את קבוצת כל המספרים השלמים החיוביים. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך שהביטוי $f(m)+f(n)-mn$ לא מתאפס ומחלק את $m\cdot f(m)+n\cdot f(n)$.

בהצלחה!

21/2/2017 **מחנה חורף** כ"ה בשבט תשע"ז

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. למוטי יש את הצעצוע המוצג בציור. הוא מורכב מקשתות זהות, שמחוברות באופן מעגלי כך שכל קשת ממשיכה קשת קודמת. אפשר לסובב כל שתי קשתות סמוכות זו ביחס לזו בנקודת החיבור, כל עוד אחת ממשיכה את השנייה. עבור כמה קשתות אפשר לשטח את הצעצוע על פני השולחן



א. בהנחה שהצעצוע מורכב מקשתות של 90° (רבע סיבוב)?

ב. בהנחה שהצעצוע מורכב מקשתות של 120° (שליש סיבוב)?

2. מצאו את $\arccos\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt[60]{\left|\sum_{k=0}^{60}\binom{60}{k}\cos\left(6k^\circ\right)\right|}\right)$.

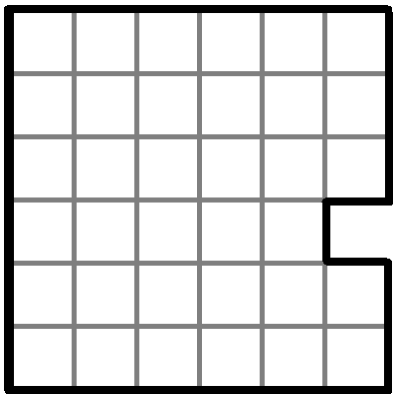
3. הוכיחו כי לכל 3 מספרים חיוביים a,b ו-c מתקיים אי-השוויון:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\geq 1+\frac{3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2\left(ab+ac+bc\right)}$$

4. בתחילת המשחק בכל משבצת של טבלה 76×76 רשום 1. בכל מהלך בני בוחר משבצת שהיא לא בשורה הראשונה ולא בעמודה הראשונה. המחשב מוסיף את השורה הראשונה לשורה שמכילה את המשבצת שנבחרה על ידי בני, ואת העמודה הראשונה לעמודה של המשבצת שנבחרה על ידי בני (ההוספה מתבצעת בו-זמנית, כלומר למשבצת שבני בחר מוסיפים בו-זמנית שני מספרים). האם ניתן לדעת מראש, מה יהיה סכום המספרים בטבלה לאחר 24 מהלכים?

5. גוף סיבוב שנוצר מטרפז שווה-שוקיים שאורכי בסיסיו 10 ס"מ ו-5 ס"מ והמרחק בין הבסיסים הוא 12.5 ס"מ, כאשר מסובבים סביב הישר המחבר את אמצעי הבסיסים, הוא קופסה מלאה בקוטג' תנוגה. הקופסה עומדת על בסיסה הקטן, כאשר מהבסיס הגדול הסירו את המכסה. מודל מתמטי פשטני לפרצופה של שרייבי החתולה המגניבה הוא חרוט, המתקבל כאשר מסובבים ישר אחד סביב ישר אחר כאשר הזווית בין הישרים היא 45°, כאשר הפה של שרייבי נמצא בקודקוד החרוט. מהו נפח הקוטג' ששרייבי תצליח להגיע אליו? יש להניח שהקוטג' מוצק.

6. שני שחקנים משחקים בתורות במשחק. בתחילת המשחק נתון מספר בעל אורך זוגי ברישום בינארי. כל שחקן בתורו בוחר רצף של ספרות המכיל את הספרה המובילה (השמאלית). המחשב הופך כל ספרה ברצף שנבחר – 0 נהיה 1, 1 נהיה 0. לאחר מכן המחשב מוחק את כל האפסים המובילים. מי שמאפס את המספר, מנצח. מי מהשחקנים יכול להבטיח ניצחון – הראשון או השני?



7. חלקו את הצורה שבציור לשני חלקים דומים זה לזה.

8. בתוך גן שצורתו מצולע משוכלל בעל 140 צלעות גדלים עצים מ-7 סוגים. העצים ממוקמים בקודקודים של מצולע משוכלל בעל 140 צלעות קטן יותר עם אותו מרכז. הסדר המעגלי של עצים הוא: ארז, ברוש, גפן, דפנה, הדס, ושינגטוניה, זית, ואז שוב ארז, ברוש, ... הוכיחו שניתן לחלק את המצולע ל-7 מצולעים חופפים כך שבכל אחד מהם יהיו עצים רק מסוג אחד.

9. יוסי בחר מספר חיובי t. על הלוח רשומים מספרים a,b,c. בכל שלב מחליפים את 3 המספרים שרשומים על הלוח במספרים

$$\frac{1-a+(t-1)c}{1+t-a-b-c},\ \frac{1-b+(t-1)a}{1+t-a-b-c},\ \frac{1-c+(t-1)b}{1+t-a-b-c}$$

עבור איזו ערכים של t התהליך בהכרח מחזורי?

בהצלחה!

22/2/2017 **מחנה חורף** כ"ו בשבט תשע"ז

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

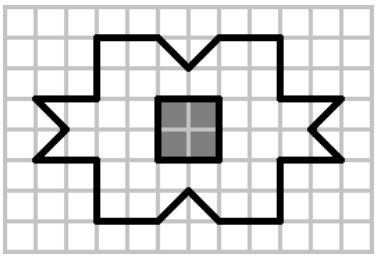
חלק א'

1. על הלוח כתובים שני מספרים $x=0,\ y=2017$. בכל שלב אפשר לעשות אחת מ-3 פעולות: אפשר להחליף את הזוג (x,y) באחד מבין הזוגות

$(x+1,y+4)$ או $(x+4,y-1)$ או $(x-5,y-3)$

(סדר המספרים בזוג הוא חשוב). האם אפשר להגיע לזוג $(0,0)$ באמצעות כמות כלשהי של מהלכים?

2. חלקו את הצורה שבתמונה ל-12 חלקים חופפים.



3. נתונה סדרת מספרים המוגדרת כך: $a_1=0$, $a_2=a_3=$ ולכל $n\geq 4$ מתקיימת נוסחת נסיגה $a_n=a_{n-2}+a_{n-3}$. הראו כי $a_{2n+1}=a_{n-1}^2+2a_na_{n+1}$ לכל $n>1$.

4. קודקודי המתומן המשוכלל $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ נמצאות על צלעות הריבוע KLMN. הוכיחו כי לכל נקודה X במישור מתקיים האי-שוויון

$$2(XK+XL+XM+XN)>\sum_{i=1}^{8}XA_i$$

בהצלחה!

כ"ו בשבט תשע"ז **מחנה חורף** 22/2/2017

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

חלק ב'

5. נתונה טבלה $n\times n$. דוד צובע את כל הקודקודים בטבלה (כולל הקודקודים שעל השפה) באדום או כחול ולאחר מכן מצייר את הקמור של הנקודות הכחולות ואת הקמור של הנקודות האדומות. דוד סופר את מספר רכיבי הקשירות בחיתוך השפות של הקמורים. אילו מספרים דוד יכול לקבל כאשר:
א. $n=2$ (9 קודקודים) ?
ב. n כללי?

6. המשולש ABC שווה-שוקיים: BC = AC. הנקודה K היא אמצע הקטע AB, הנקודה N היא אמצע הקטע AC והנקודה M היא אמצע הקטע BK. הנקודה D היא עקב האנך מ-K ל-CB; הנקודה I היא השיקוף של K ביחס ל-MN, כלומר המרובע MINK הוא דלתון. הנקודה J היא עקב האנך מ-I ל-KD, והנקודה E מקיימת כי B הוא אמצע DE. הראו כי הישרים BI ו-EJ נפגשים על הישר CK.

7. מצאו את כל הפתרונות הטבעיים למשוואה $a^6+a^4+54a^2=b^4$.

בהצלחה!

22/2/2017 **מחנה חורף** כ"ו בשבט תשע"ז

קבוצת רותם

1. יהא n חיובי שלם. נסמן ב-$\tau(n)$ את כמות המחלקים החיוביים של n, וב-$\tau_1(n)$ את כמות המחלקים החיוביים של n להם שארית 1 בחלוקה ב-3. נניח כי המספר $m=\frac{\tau(10\cdot n)}{\tau_1(10\cdot n)}$ הוא שלם. מצאו את כל הערכים של עבור m.

2. בארכיפלג ישנם $n\geq 3$ איים. חברת תיירות מציעה מעבורות בין חלק מזוגות האיים. ידוע כי לכל חלוקה של האיים לשתי קבוצות לא ריקות, מוצעת מעבורות בין אי כלשהו מהקבוצה הראשונה ואי כלשהו מהקבוצה השנייה.

בסיום כל שנה, החברה מחליטה להפסיק את השירות באחד מנתיבי השייט בין שני איים X ו-Y. כדי לפצות על זה, מציעים קווים חדשים בהתאם לכלל הבא: לכל אי שמוצעת מעבורות בינו ובין בדיוק אחד מהאיים X, Y, פותחים קו חדש לאי השני.

ידוע כי בכל רגע בזמן, ולכל חלוקה של האיים לשתי תתי-קבוצות לא ריקות, מתישהו בעתיד החברה תפסיק את השירות באחד הנתיבים המחברים בין תתי הקבוצות.

הוכיחו כי מתישהו בעתיד יהיה אי שתוצע מעבורת בינו ובין כל אחד מהאיים האחרים.

3. נתון משולש ABC שאינו שווה-שוקיים. מרכז המעגל החסום בו יסומן I. מרכז המעגל החסום מבחוץ מול A יסומן I_A. השיקוף של I_A ביחס ל-BC יסומן I'_A. השיקוף של הישר AI'_A ביחס לישר AI יסומן ℓ_A. באופן דומה נגדיר גם I_B, I'_B ו-ℓ_B. החיתוך של ℓ_A עם ℓ_B יסומן P.

א. הראו כי P נמצא על OI, כאשר O הוא מרכז המעגל החוסם של ABC.

ב. אחד המשיקים מ-P למעגל החסום ב-ABC פוגש את המעגל החוסם של ABC בנקודות X ו-Y. הוכיחו כי $\sphericalangle XIY=120^\circ$.

בהצלחה!