נורות

0. בחדר יש 3 נורות, בחוץ 3 מפסקים. מותר לעשות פעולות כלשהן עם המפסקים, ולאחר מכן להיכנס לחדר. האם אפשר אחרי שנכנסים לחדר לזהות, איזו נורה מקושרת לאיזה מפסק?

1. בשורה 100 נורות, שבהתחלה כולם כבויות. בשלב ראשון מדליקים את כל הנורות. בשלב שני מכבים כל נורה ששנייה. בשלב שלישי משנים מצב של כל נורה שלישית, בשלב רביעי משנים מצב של כל נורה רביעית, וכך הלאה, בשלב 100 משנים מצב של נורה מספר 100. כמה נורות כבויות בסוף?

2. יש מספר נורות ומספר כפתורים. כל כפתור משנה מצב של מספר נורות. הוכיחו שכמות המצבים (של איזה נורות דולקות ואיזה לא) זו חזקה של 2.

3. באחד מבתי הסוהר הציע המנהל לאסירים את העסקה הבאה המאפשרת להם להשתחרר: בחצר בית הסוהר ניצב צריף ובתוכו נורה עם מפסק להדלקתה ולכיבוייה. המנהל יקרא מרשימת האסירים באופן מקרי את אחד השמות ואותו אסיר יכנס לצריף. בתוך הצריף הוא יכול להדליק או לכבות את הנורה כרצונו עד שיחליט לצאת מהצריף. האסירים נקראים לצריף באקראי כך שאסיר יכול להיכנס לצריף מספר פעמים. כאשר אחד האסירים יאמר: "כל 99 האסירים האחרים היו לפני" וזה יהיה נכון, אז ישוחררו כל האסירים. אם יטעה ועדיין לא היו 99 האסירים בתוך הצריף, ישארו האסירים בכלא. האסירים אינם יודעים מי נכנס כבר לצריף כי הם נקראים לצריף בחשאי מבלי שהאחרים ישמעו או יראו.
מהי השיטה בה ישתמשו האסירים כדי להצליח במשימה ולהשתחרר?

4. בכל נקודה שלמה של ציר מספרים נמצאת נורה וכפתור. כאשר לוחצים על כפתור המצב של הנורה שלו משתנה מדלוק לכבוי או להפך. בהתחלה אף נורה לא דולקת.
נתונה קבוצה סופית של מספרים שלמים S. אפשר להוסיף מספר שלם כלשהו לכל האיברים של S וללחוץ על כל הכפתורים של המספרים שהתקבלו.
הוכח שעבור כל S באמצעות מספר פעולות כאלה אפשר להגיע למצב שיהיו בדיוק 2 נורות דלוקות.

5. משבצות של ריבוע 10×10 הן נורות. כאשר לוחצים על משבצת, כל המשבצות באותה שורה ואותה עמודה משני מצב. בהתחלה כל הנורות כבויות. מצאו את מספר המינימלי של מהלכים שצריך בשביל להדליק:
א. את כל הנורות
ב. 99 נורות.
ג. 98 נורות.

6. נורות מסודרות בצורה של ריבוע 8×8. המצב ההתחלתי של הנורות הוא אקראי: לכל נורה סיכוי $\frac{1}{2}$ להיות דלוקה, באופן בלתי תלוי בנורות האחרות. נגיד שנורה משפיעה על נורה אחרת אם היא נמצאת בסמוך אליה באחד מ-3 כיוונים: מימין, משמאל או מלמעלה.

בכל מהלך של המשחק מותר להדליק או לכבות נורה, שמספר הנורות הדולקות המשפיעות עליה אי-זוגי. מה הסיכוי שאפשר להגיע למצב שרק נורה אחת דולקת?

7. בקוביה $4\times4\times4$ בכל משבצת כתוב מספר שלם. מותר בכל מהלך להוסיף 1 למשבצות מסוימת ולכל המשבצות הסמוכות. האם אפשר להגיע למצב שכל המשבצות יתחלקו ב-7.

8. בכל קודקוד של גרף פשוט יש נורה וכפתור. מותר בכל מהלך ללחוץ על כפתור כלשהו, וזה ישנה מצב של נורת הקודקוד ושל כל הנורות בקודקודים הסמוכים. הראו שאפשר להגיע ממצב שבו כל הנורות כבויות למצב שכל הנורות דלוקות.

9. אולם עגול מואר באמצעות 11 מנורות, שנמצאות על היקפו במעגל, במרחקים שווים. כל מנורה יכולה להיות במצב דלוק או כבוי. מתחת לכל מנורה יש כפתור. כאשר לוחצים על כפתור מסוים, 3 מנורות משנות את מצבם: מנורה שנמצאת מעליו ושתי מנורות שנמצאות ליד.
המצב של התאורה באולם לא ידוע, וצריך לגרום לכך שמנורה אחת בדיוק תהיה דלוקה.
עובד החזקה מנוסה טוען, שבכל מקרה אפשר לעשות את זה ב-K לחיצות על כפתורים, אבל יתכן מצב שבו לא מספיק פחות מ-K לחיצות.
בהנחה שעובד החזקה אומר את האמת, מהו K?