לרותם (יום שני)

1. לכל n טבעי הוכיחו כי $\sqrt[n]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\geq 1$.

2. בהנחה $\{x,y,z\}\subset\left(0,\frac{1}{2}\right]$, הוכיחו כי $x^{2y}+y^{2z}+z^{2n}\geq 1$.

3. בהנחה $\{x,y,z\}\subset(-1,+\infty)$, הוכיחו כי

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2.$$

4. בהנחה $\{a,b,c,d\}\subset[0,1]$, הוכיחו כי

$$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a\leq a^2d+b^2a+c^2b+d^2c+\frac{8}{27}.$$

5. המספרים a,b,c אי-שליליים ומקיימים $1+a+b+c=2abc$. הוכיחו כי

$$\frac{ab}{1+a+b}+\frac{ac}{1+a+c}+\frac{bc}{1+b+c}\geq\frac{3}{2}.$$

6. מספרים חיוביים a,b,c מקיימים $a+b+c=7$. הוכיחו כי

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)+30abc+15\geq 0.$$

7. מספרים ממשיים a,b,c המקיימים $ab+ac+bc=abc$, הוכיחו כי

$$9\left(a^2+b^2+c^2\right)+14\left(a+b+c\right)+9\geq 14abc.$$

8. יהיו a,b,c,d מספרים חיוביים. הוכיחו כי

$$\sqrt{\frac{a}{a+2b+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+2c+d}}+\sqrt{\frac{c}{c+2d+a}}+\sqrt{\frac{d}{d+2a+b}}\leq 2.$$

לירדן (יום רביעי)

1. לפתור מערכת משוואות:

$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 5 \\ 2^x + 3^y = 5 \end{cases}$$

2. מספרים x, y ו-z שלמים חיוביים. פתרו את המערכת

$$\begin{cases} x^2 - y = (z-1)^2 \\ y^2 - z = (x-1)^2 \\ z^2 - x = (y-1)^2 \end{cases}$$

3. יהיו a, b ו-c שלמים חיוביים כך ש-$a+b+c=6$ הוכיחו כי

$$\frac{a^3}{a^4+1} + \frac{6b^2}{b^3+16} + \frac{54c^2}{c^4+243} \le 3.$$

4. מספרים x, y ו-z חיוביים. הוכיחו כי

$$\frac{1}{x^3+x+2} + \frac{1}{y^3+2y+6} + \frac{1}{z^3+3z+12} < \frac{7}{24}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}.$$

5. מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}.$$