מחנה סתיו, 28.9.2016

1. מספרים a, b ו-c מקיימים $a+b+c=1$, $a\le 1$, $b\le 1$, $c\le 1$. הוכיחו כי

$$a^2+b^2+c^2+2abc\le 1$$

2. הראו שלכל משולש $a+\frac{3}{2}h_a\le 4R$.

3. הוכיחו לכל משולש $\frac{a+b-c}{c^2+ab}+\frac{a+c-b}{b^2+ac}+\frac{b+c-a}{a^2+bc}\ge\frac{4}{a+b+c}$.

4. מספרים חיוביים a, b ו-c מקיימים $a+b+c=3$. הוכיחו כי

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{2a^2+2c^2+a+c}}+\frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2+a+b}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}$$

5. מספרים אי-שליליים a, b ו-c מקיימים $ab+bc+ca=3$. הוכיחו כי

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\le\frac{a+b+c}{2}$$

6. מספרים חיוביים a, b ו-c מקיימים $a+b+c=3$. הוכיחו כי

$$\frac{a}{b^2(ca+1)}+\frac{b}{c^2(ab+1)}+\frac{c}{a^2(bc+1)}\ge\frac{9}{(1+abc)(ab+ac+bc)}$$

7. מספרים ממשיים x, y ו-z מקיימים $x+y+z=3$. הוכיחו כי

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+5)\ge\frac{729}{16}$$

8. במשולש חד-זוויות, הזוויות הן α, β ו-γ. הוכיחו כי

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta-1}{\cos\gamma}+\frac{\cos\alpha+\cos\gamma-1}{\cos\beta}+\frac{\cos\beta+\cos\gamma-1}{\cos\alpha}\ge 0$$