<u>תרגיל גרפים</u>

0. המרחק בין שני קודקודים של עץ הוא אורך המסלול המחבר ביניהם. רמת הבדידות של קודקוד היא סכום מרחקיו מכל שאר הקודקודים.
נניח שבעץ יש שני קודקודים שרמת הבדידות שלהם נבדלת ב-1. הוכח כי בעץ יש מספר אי-זוגי של קודקודים.

1. במדינה רחוקה ומתוקנת שבה יש תחבורה ציבורית מפותחת, בין כל שתי ערים יש קו רכבת או קו אוטובוס.
הוכח כי ניתן לחלק את הערים לשני מחוזות, כך שניתן לטייל במחוז הראשון רק באמצעות הרכבת ולעבור בכל עיר בדיוק פעם אחת, וכן ניתן לטייל במחוז השני באותו אופן באמצעות אוטובוסים.

2. רוצים לצייר במישור גרף מלא עם n קודקודים, כך שכל קשת נחתכת פעם אחת לכל היותר. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של n?

3. חתכו מתוך קוביה $4 \times 4 \times 4$ מספר קוביות של $1 \times 1 \times 1$, כך שהצורה שהתקבלה עדיין מחוברת (כלומר ניתן להגיע מכל קוביה קטנה שנשארה לכל אחת אחרת תוך מעבר רק בין פאות של קוביות קטנות שנשארו). כמו כן, אם מסתכלים מכל אחד משלושת הפאות על הקוביה, לא ניתן לראות את הצד השני שלה.

כמה קוביות לכל היותר הסרנו?

4. במישור ציירו $4n$ נקודות, וחיברו בקו כל 2 נקודות שמרחקן 1. הסתבר כי לכל $n+1$ נקודות מהקבוצה יש 2 נקודות שמחוברות בקו. הוכח כי בקבוצה יש לפחות $7n$ קווים.

5. נתון גרף עם 9 קודקודים. ידוע כי לכל רביעיית קודקודים יש לפחות 2 קשתות שקצותיהן הם קודקודים מהרשימה. מהי כמות הקשתות המינימלית בגרף?

6. קודקודי מצולע משוכלל בעל 101 צלעות נצבעו בשני צבעים. נסמן ב-N את מספר המשולשים קהי הזווית שעבורם הקודקוד בזווית הקהה הפוך בצבעו משני הקודקודים האחרים.
א. מהו הערך המקסימלי של N?
ב. בכמה דרכים ניתן לצבוע את הקודקודים כך שהערך המקסימלי יתקבל?

בהצלחה!