תרגיל גיאומטרי

1. במישור נתונים שני ישרים שמאונכים זה לזה, ונקודה F מחוץ לשני הישרים. מצאו את מקום הגיאומטרי של נקודות X במישור, עבורם קיים מלבן שאחד הקודקודים שלו הוא X, קודקוד אחר הוא F, ושני קודקודים נוספים נמצאים על שני הישרים הנתונים (הקודקודים של מלבן יכולים להיות מסודרים באופן כלשהו).

2. במשושה קמור האלכסון נקרא מגניב, אם הוא מפצל את המשושה לשני מרובעים חוסמים. מהי הכמות המרבית של אלכסונים מגניבים?

3. נתונים שלושה ארבעונים קשיחים (מעץ) שכל מקצועותיהם באורך 1.
האם אפשר לשים את כולם בקופסה בצורת קובייה, שמקצועותיה באורך 1?

4. במשולש ABC חד-זוויות מרכז המעגל החוסם הוא O. הישר ℓ עובר דרך O. הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c הם שיקופים של ℓ ביחס לצלעות המשולש. נקודה A' היא נקודת מפגש של ℓ_b עם ℓ_c, באופן דומה מוגדרות הנקודות B' ו-C'. נקודות O' ו-I' הם המרכזים של המעגל החוסם והחסום של A'B'C'. נתון מספר ממשי k. ניקח נקודה P על הקטע O'I' עבורה $\frac{O'P}{I'P}=k$. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות P, כאשר ℓ מסתובב סביב O.

5. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O, ותיכוניו נפגשים ב-M. נסמן ב-D את האמצע של BC. נסמן ב-E את נקודת החיתוך של מעגל שקוטרו BC עם הגובה מ-A (כאן גובה הוא קטע). החיתוך של OD ו-EM יסומן F. הישרים דרך F שמקבילים ל-OB ו-OC פוגשים את BC בנקודות K ו-L בהתאמה. האנכים ל-BC דרך K ו-L יחתכו את הצלעות AB ו-AC בהתאמה בנקודות P ו-Q. המעגל שמשיק לישרים OB ו-OC בנקודות B ו-C יסומן Ω. הוכיחו כי המעגל החוסם של APQ משיק ל-Ω.

6. בנו משולש, בהינתן קודקוד, מרכז המעגל החוסם ונקודת למואן (שהיא נקודת מפגש התיכושקפים).

5. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O, ותיכוניו נפגשים ב-M. נסמן ב-D את האמצע של BC. נסמן ב-E את נקודת החיתוך של מעגל שקוטרו BC עם הגובה מ-A (כאן גובה הוא קטע). החיתוך של OD ו-EM יסומן F. הישרים דרך F שמקבילים ל-OB ו-OC פוגשים את BC בנקודות K ו-L בהתאמה. האנכים ל-BC דרך K ו-L יחתכו את הצלעות AB ו-AC בהתאמה בנקודות P ו-Q. המעגל שמשיק לישרים OB ו-OC בנקודות B ו-C יסומן Ω. הוכיחו כי המעגל החוסם של APQ משיק ל-Ω.

רמזים לשאלה 5.

נסמן BN, AR גבהים.

1. $\frac{EH}{EA}=\frac{OF}{DF}=\frac{CK}{DK}=\frac{CP}{CS}$.

2. $\sphericalangle ENH=\sphericalangle ECB=\sphericalangle ECR$

3. $\sphericalangle ECB=\sphericalangle HNE=\sphericalangle CDP$, כמו כן $\sphericalangle EBC=\sphericalangle QDB$.

4. $\sphericalangle PDQ$ ישרה, מעגל PDQ משיק ל-BC.

5. מגדירים X כחיתוך מעגלים CPD ו-BQD.

6. X נמצא על מעגל שמשיק ב-B ל-OB ול-OC ב-C.

7. APXQ חסום.

8. המעגלים משיקים ב-X.

