דוגמאות לפונקציות יוצרות

לאלה ששכחו או לא יודעים מה זה פונקציה יוצרת, הסבר קצר כהקדמה לתרגיל של גיא אם 3 דוגמאות.

בהינתן סדרה $\left(a_n\right)$ פונקציה יוצרת היא הפונקציה של תור אינסופי $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

במקרים מסוימים מדברים על פונקציה יוצרת אקספוננציאלית: $g\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!}$.

כלומר במקום לחשוב על כל איבר של סדרה בנפרד, מייצרים פונקציה שמקודדת בה כל הסדרה בו-זמנית כמקדמים של תור חזקות. כמובן בכל מקרה ספציפי ניתן לשאול האם התור מתכנס, ולפעמים אפשר לענות על שאלה זאת, לפעמים אפשר גם לדלג על שאלה זאת ולהגיד שמדובר בדבר שנקרא "תור פורמאלי".

העניין הוא, שפונקציה היא אחד, והסדרה היא הרבה, ולפעמים הטיפול בפונקציה הוא קל יותר מהטיפול בסדרה, ואפשר לפתור את השאלה על פונקציה ולקבל מסקנות על הסדרה.

דוגמא I. נמצא נוסחה לסדרת פיבונצ'י בשיטה של פונקצית יוצרת. כזכור $f_0=f_1=1$, וגם $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$. נבנה פונקציה $g\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n x^n$. מנוסחת נסיגה רואים שמקדמי $x\cdot g\left(x\right)+x^2\cdot g\left(x\right)$ זה כמעט $g\left(x\right)$, ההבדל היחיד הוא במקדם ה-0. מכאן

$$g\left(x\right)=1+x\cdot g\left(x\right)+x^2\cdot g\left(x\right)$$

מכאן קל למצוא את g. לכן $\left(1-x-x^2\right)\cdot g\left(x\right)=1$. כלומר

$$g\left(x\right)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x}-\frac{\beta}{1-\beta x}\right)=$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{n+1}x^n\right)=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)x^n$$

כאשר α,β הם שורשים של משוואה ריבועית (תרגיל לקורא לפתור את המשוואה הריבועית ולהפוך את הנוסחא למפורשת). מהשוואת המקדמים רואים כי

$$f_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

כלומר מספרי פיבונצ'י הם סכום שתי סדרות הנדסיות.

דוגמא II. נמצא נוסחה לפולינומים של צ'בישוב. מסתבר ש-$\cos(nx)=p_n(\cos x)$;

כמו כן $\frac{\sin(nx)}{\sin x}=q_n(\cos x)$, כאשר p_n הוא פולינום ממעלה n, ואילו q_n הוא פולינום ממעלה $n-1$. במקום לחשב אותם אחד-אחד, נבנה פונקציה יוצרת שמכילה את כולם בו-זמנית. אנו נשתמש בסימונים $c=\cos x$, $s=\sin x=c$, $c+i\cdot s=z$

$$f(n)=\sum_{n=0}^{\infty}(\cos nx+i\cdot\sin nx)\cdot t^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\cdot t^n=\frac{1}{1-zt}=\frac{1}{1-ct-ist}=$$

$$=\frac{1-c+is}{(1-ct)^2+s^2t^2}=\frac{1-c+is}{1-2ct+c^2t^2+s^2t^2}=\frac{1-c+is}{1-2ct+t^2}=$$

$$=\big((1-c)+is\big)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\big(2ct-t^2\big)^n=\big((1-c)+is\big)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\big(2ct-t^2\big)^n=$$

$$=\big((1-c)+is\big)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2ct)^k\cdot\big(-t^2\big)^{n-k}=$$

$$=\big((1-c)+is\big)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{2n-k}(2c)^k\cdot(-1)^{n-k}=$$

$$\left|\begin{array}{l}m=2n-k\\ \ell=n-k\end{array}\right.$$

$$=\big((1-c)+is\big)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}t^m\cdot\sum_{\ell=0}^{m/2}\binom{m-\ell}{\ell}(-1)^{m-\ell}(2c)^{m-2\ell}$$

מכאן $\frac{\sin(nx)}{s}=\sum_{\ell=0}^{m/2}\binom{m-\ell}{\ell}(-1)^{m-\ell}(2c)^{m-2\ell}$,

אז

$$\cos(nx)=\sum_{\ell=0}^{m/2}\binom{m-\ell}{\ell}(-1)^{m-\ell}(2c)^{m-2\ell}-c\sum_{\ell=0}^{m/2}\binom{m-1-\ell}{\ell}(-1)^{m-1-\ell}(2c)^{m-1-2\ell}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{m/2}\left(2\binom{m-\ell}{\ell}-\binom{m-1-\ell}{\ell}\right)(-1)^{m-\ell}2^{m-1-2\ell}c^{m-2\ell}=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{m/2}\left(\binom{m-\ell}{\ell}+\binom{m-1-\ell}{\ell-1}\right)(-1)^{m-\ell}2^{m-1-2\ell}c^{m-2\ell}$$

דוגמה III. מסתבר כי $1^k+2^k+\ldots+\left(n-1\right)^k=b_k\left(n\right)$, ו-$b_k\left(n\right)$ הוא פולינום ממעלה $k+1$, הפולינום של ברנולי. למשל, $p_1\left(n\right)=\frac{n\left(n-1\right)}{2}$, $p_2\left(n\right)=\frac{n\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}{6}$, ואפשר לחשב גם את הפולינומים האחרים. יעקוב ברנולי מצא שיטה מהירה ויפה למצוא את כל הפולינומים בו-זמנית (ועשה על זה שחצנות) באמצעות מקדמי התור

$$\frac{x}{e^x-1}=B_0+B_1x+\frac{B_2x^2}{2!}+\frac{B_3x^3}{3!}+\frac{B_4x^4}{4!}+\ldots$$

סדרת המקדמים נקראת מספרי ברנולי. השיטה היא פונקציה יוצרת אקספוננציאלית.

$$\mathfrak{B}_n\left(x\right)=n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k\left(n\right)x^k}{k!}=n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1^k+2^k+\ldots+\left(n-1\right)^k\right)x^k}{k!}=$$

$$=1+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\quad=\quad1+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\left(jx\right)^k}{k!}\quad=\quad\sum_{j=0}^{n-1}e^{jx}\quad=\quad\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}=$$

$$=\frac{e^{nx}-1}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n^jx^k}{j!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_\ell x^\ell}{\ell!}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\cdot\sum_{j=0}^{k}\frac{n^j}{j!\cdot\left(k-j\right)!}\cdot B_{k-j}$$

מהשוואת מקדמים רואים כי $\frac{b_k\left(n\right)}{k!}=\sum_{j=0}^{k}\frac{n^j}{j!\cdot\left(k-j\right)!}\cdot B_{k-j}$ כלומר

$$b_k\left(n\right)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cdot B_{k-j}\cdot n^j\ .$$