משוואות פונקציונאליות שלמות

$\mathbb{N}$ היא קבוצה של מספרים שלמים גדולים מ-0. כל פונקציה היא $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אלה אם כן נאמר אחרת. בכל דוגמה צריך למצוא את כל הפונקציות שמקיימות את כל התנאים.

1. $f\left(m\cdot f\left(n\right)\right)=n+f\left(2015\cdot m\right)$.

2. $f\left(1\right)=1, f\left(3\right)=3, f\left(2n\right)=f\left(n\right),$
$f\left(4n+1\right)=2f\left(2n+1\right)-f\left(n\right), f\left(4n+3\right)=3f\left(2n+1\right)-2f\left(n\right)$.
כמה פתרונות יש ל-$f\left(n\right)=n$ עבור $n\le 1988$?

3. $f\left(1\right)=2$, $f\left(2\right)=1$, $f\left(3n\right)=3f\left(n\right)$,
$f\left(3n+1\right)=3f\left(n\right)+2$, $f\left(3n+2\right)=3f\left(n\right)+1$.
כמה פתרונות יש ל-$f\left(n\right)>n$ עבור $n<730$?

4. $m^2+f\left(n\right)\mid m\cdot f\left(m\right)+n$.

5. $f\left(m+n\right)-1\mid f\left(m\right)+f\left(n\right)$, $n^2-f\left(n\right)$ הוא ריבוע שלם.

6. $f\left(mn\right)=\mathrm{lcm}\left(m,n\right)\cdot\gcd\left(f\left(m\right),f\left(n\right)\right)$.

7. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$,
$x\cdot f\left(2f\left(y\right)-x\right)+y^2\cdot f\left(2x-f\left(y\right)\right)=\frac{\left(f\left(x\right)\right)^2}{x}+f\left(y\cdot f\left(y\right)\right)$.

8. $f\left(n!\right)=\left(f\left(n\right)\right)!$, $n-m\mid f\left(n\right)-f\left(m\right)$.

9. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, n קבוע, $f\left(x+y+f\left(y\right)\right)=f\left(x\right)+ny$ לכל x,y.

10. $f\left(n^2f\left(m\right)\right)=m\cdot f\left(n\right)^2$. מצאו את המינימום של $f\left(1998\right)$.

11. $\left(f\left(m\right)\right)^2+f\left(n\right)\mid\left(m^2+n\right)^2$.

12. $f\left(n\right)\mid a-b\ \Leftrightarrow\ n\mid f\left(a\right)-f\left(b\right)$.

13. $f\left(2f\left(f\left(n\right)\right)+m\right)=f\left(m\right)+2n$.

14. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f\left(k\right)\cdot f\left(k+1\right)}=\frac{f\left(f\left(n\right)\right)}{f\left(n+1\right)}$.