תרגיל דיופנטי

בתרגיל זה 0 לא טבעי.

1. מצאו את כל הפתרונות במספרים טבעיים למשוואה $1997^x + 15^y = 2012^z$.

2. מצאו את כל זוגות הראשוניים p, q כך ש $pq|5^p + 5^q$.

3. מצאו את כל הפתרונות הטבעיים למשוואה $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = w^{2n}$ כך ש $n \equiv 3(mod\ 4)$ וגם $(n, xyz) = 1$.

4. מצאו את כל הפתרונות במספרים טבעיים למשוואה $\frac{x^7-1}{x-1}=y^5-1$.

5. מצאו את כל המספרים הטבעיים $m, n \geq 2$ כך ש $m + 1$ הוא מספר ראשוני, $m \equiv 2(mod\ 4)$ וקיימים p ראשוני ו a שלם אי שלילי כך ש $\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1}=m^n+p^a$.

6. מצאו את כל הזוגות של מספרים טבעיים m, n כך ש $mn - 1|(n^2 - n + 1)^2$.

7. מצאו את כל הראשוניים האי זוגיים p, q כך שקיים מספר טבעי $n \geq 2$ אשר עבורו מתקיים
$$\begin{cases} q^{n+2} \equiv 3^{n+2}(mod\ p^n) \\ p^{n+2} \equiv 3^{n+2}(mod\ q^n) \end{cases}$$

8. הוכיחו כי למשוואה הבאה אין פתרונות ברציונליים $x - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y} = 4$.

9. יהיו $n \geq k^2 \geq 64$ מספרים טבעיים
   א. הוכיחו כי קיים מספר ראשוני $p > k$ כך ש $p|\binom{n}{k}$.
   ב. הוכיחו כי לא קיימים מספרים טבעיים $m, l \geq 2$ כך ש $\binom{n}{k} = m^l$.