קערות וכיפות

בכל השאלות בדף זה מדובר על קבוצות של נקודות במצב כללי (או גנרי) יעני אף 3 נקודות לא על ישר אחד.

1. הוכיחו שבאינסוף נקודות במישור יש אינסופצוּלע קמור.
2. נסמן ב- $N(n)$ את המספר המינימאלי של נקודות במישור שבהכרח יש n נקודות מתוכן שיוצרות מצולע קמור. הוכיחו ש- $N(4)=5$. הוכיחו ש-$N(5)\geq 9$.
   אל תוכיחו ש-$N(5)=9$.
3. הוכיחו שעבור $n>4$ יש לפחות $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}$ מרובעים קמורים.
4. הוכיחו שמ-2000 נקודות אפשר להרכיב 400 מרובעים קמורים זרים (בשטחם).
   * האם ניתן להרכיב קצת יותר?
   מה עם 500?
   (אנחנו לא יודעים את התוצאה האופטימאלית.)
5. הוכיחו ש-$N(n)\geq \alpha^n$ עבור $\alpha>1$.
6. הנקודות $(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)$ יקראו m-כיפה אם $x_1<\dots<x_k$ וגם
$$(*)\qquad \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>\dots>\frac{y_{m-1}-y_m}{x_{m-1}-x_m}$$
   ויקראו m-קערה אם אי-השיוויונים ההפוכים מתקיימים ב-$(*)$. נסמן ב- $f(k,l)$ את הכמות המינימאלית של נקודות במישור במצב כללי בלי שתי נקודות עם אותו ערך בציר x עבורן בהכרח יש l-כיפה או שיש k-קערה.
   הוכיחו ש-$f(k,l)=\binom{k+l-4}{k-2}+1$.
7. הוכיחו ש-$2^{n-2}+1\leq N(n)\leq \binom{2n-5}{n-3}+2$.
8. נסמן ב- $H(n)$ את מספר הנקודות המינימאלי במישור כך שבהכרח יש מצולע קמור עם n קודקודים מתוכן שאין בו מצולע אחר.
   הוכיחו ש-$H(7)$ לא קיים.
   אל תוכיחו: $H(5)=10$.

בהיאבון!