<u>שברים משולהבים:</u>

<u>פיתוח של פי:</u>

כמה זה π? אז ידוע שזה בערך 3. באופן יותר מדוייק, זה בערך 3.1 ובדיוק עוד יותר גבוהה זה 3.14 ואז 3.141 וכ'ו. מצד שני, מתקיים גם ש-$\pi \approx \frac{22}{7}$. ומה כ"כ מיוחד בזה? כדי להבין, נשים לב כי ... $\frac{22}{7} = 3.142$.

למה זה מגניב? כי הקירוב $\pi \approx \frac{22}{7}$ טוב בערך כמו הקירוב $\pi \approx 314/100$, אבל המכנה שלו, 7, קטן בהרבה. כלומר, הוא הרבה יותר טוב מבחינת **השגיאה היחסית**. בהמשך נראה איך התקבל קירוב זה, ואיך קיבלנו קירוב כ"כ טוב עם מכנה כ"כ קטן.

אחד חלקי וערך שלם:

איך רושמים מספר? נכון, ייצוג עשרוני. איך רושמים קירוב עשרוני של מספר?

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{10}(\lfloor 10\{x\} \rfloor + \cdots).$$

במילים: כל פעם רושמים בצד את החלק השלם, ואת החלק השבור מכפילים בעשר. כך מקבלים את **הייצוג העשרוני**.

אבל נניח שלא ידענו להכפיל בעשר, אלא רק להפוך את המספר.

אז יכולנו לנסות גישה אחרת.

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{(\frac{1}{\{x\}})} = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{\lfloor (\frac{1}{\{x\}}) \rfloor + \frac{1}{\cdots}}.$$

במילים, רושמים בצד את החלק השלם והופכים את החלק השבור. בסוף מקבלים ייצוג של המספר כך

ולפיתוח כזה קוראים **שבר משולב**.

לעיתים, לשם נוחות, נסמן את האיבר ה-n בפיתוח זה ב-וכשנרצה לחשב מביטוי זה את הקירוב עצמו נעזר מספר פעמים בזהות $[a_0, \dots, a_n] = \left[a_0, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right]$.

כך למעשה התקבל הקירוב של π:

$$\pi = 3 + (0.141 \dots) = 3 + \frac{1}{7+\cdots} \approx 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$

או בסימון שלנו $\pi \approx [3,7] = \left[3 + \frac{1}{7}\right] = \frac{22}{7}$.

<u>דוגמאות לשימושים בשבר משולב:</u>

<u>קידוד:</u>

נניח שיש לנו א-ב בעל, נגיד, של 30 תווים. אנחנו רוצים לקודד מחרוזות באמצעות בתים (בית הוא כינוי ממדעי המחשב ל- 8 ביטים, כלומר יש $2^8 = 256$בתים שונים). מצד אחד, נרצה לחסוך כמה שניתן במקום, כלומר נרצה שטקסט שמקודד ב- k בתים יכיל כמה שיותר תוכן. מצד שני, נרצה שהפענוח של הקידוד יהיה מהיר, ובשביל זה צריך שמספר הבתים שצריך לקרוא בו זמנית כדי לפענח קטע טקסט יהיה קטן ככל הניתן.

מה נוכל לעשות? נוכל למשל לנסות לקודד כל אות בעזרת בית. זה בזבזני מאוד, שהרי מספיקים בפועל 5ביטים כדי לקודד תו בודד, אז בזבזנו יותר מ-3 ביטים (שזה נורא!).

יכולנו לנסות לקודד 2 תוים בעזרת בית, אבל זה גם לא יעבוד, לא נצליח לקודד כל זוג תוים בעזרת בית, כי יש $30^2 > 2^8$ זוגות תוים.

באופן כללי, נוכל לנסות לקודד m תווים באמצעות ו-n בתים. זה יעבוד כאשר $30^m < 2^n$וכדי לחסוך במקום נרצה גם שהיחס $\frac{30^m}{2^n}$ יהיה קטן ככל הניתן. כמו כן, נרצה גם כי n יהיה קטן יחסית כדי שהפענוח יהיה מהיר.

איך מוצאים כאלה זוגות (m,n)? נכון! שבר משולהב. נפתח לשבר משולב את $\log_2 30$ וכך נרשום $\log_2 30 \approx \frac{n}{m}$, ואז הזוג (m,n) ייתן

קירוב כנדרש בתנאי שאי-השוויון $30^m < 2^n$. הדבר החשוב פה הוא שאנחנו צריכים לשקלל גם את היחס הנ"ל, אבל גם את הגודל של n, כלומר אנחנו רוצים למזער את **השגיאה היחסית**.

<u>רכבת וקרונות:</u>

זו דוגמא דומה מאוד. נניח שיש לנו רכבת עם קרון באורך s, ורוצים להסיע על הרכבת מסע המורכב מארגזים באורך t, שאיננו בהכרח שלם. מן הסתם, ניתן להסיע ברכבת רק כמות קטנה של קרונות, בגלל הכוח המוגבל של מנוע הרכבת. כמה קרונות נרצה לחבר לכל קטר?

גם את זה ניתן לפתור עם **שבר משולהב**. נפתח לשבר משולהב את היחס $\frac{t}{s}$ ונרשום $\frac{t}{s} \approx \frac{m}{n}$ כאשר n קטן יחסית אבל הקירוב טוב, וכך נקבל רכבות קצרות שבהן הארגזים נכנסים כמעט בדיוק!

<u>לוח שנה+שיטת חיתוכים ומחיקות מסדרה:</u>

כיצד מייצרים לוח שנה? ניתן, למשל, לחלק את השנה לחודשים, או לימים. במילים אחרות, עלינו לחשב את היחס $\frac{year}{day}$ או $\frac{year}{month}$.

למשל, את לוח השנה הלועזי (גרגוריאני) בנו כך. אמרו שבשנה יש בערך 365 ימים. באופן יותר מדוייק, בשנה יש בערך $365\frac{1}{4}$ ימים, ובאופן יותר מדוייק $\cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{4} + 365 \approx \ldots 365.24$. לכן כל 4 שנים נוסיף יום, וכל 100 שנים נחסיר יום מלוח השנה.

לחילופין, ניתן לומר כי בשנה יש בערך $12\frac{7}{19}$ חודשים.

זה נראה על פניו קירוב הרבה פחות טוב: אנחנו עובדים עם חודשים במקום ימים שזו רזולוציה הרבה יותר גרועה, ויש לנו קירוב עם מכנה 19 כך שהיינו מצפים לטעות של בערך $\frac{1}{19}$ חודשים. בפועל, לוח השנה העברי מדוייק יותר מהלועזי! איך זה קורה? **שבר משולהב.**

אבל איך אבות אבותינו הצליחו לפתח את היחס לשבר משולב? זה פשוט. נניח שיש לנו מאורע שיסומן a שקורה באופן מחזורי ומאורע אחר b שגם קורה באופן מחזורי. אנחנו מעוניינים להאריך את יחס המחזורים של המאורעות (במקרה שלנו aהוא ירח מלא ו- bהוא הגשם הראשון למשל).

אז כל פעם שקורה a רושמים a וכך גם עם b. מקבלים רשימת תווים שכזו: ... $aaabaaaabaaaabaaabaaaab$. עכשיו רושמים בצד את הרצף הקצר ביותר של a שיש בין כל שני b ומוחקים כל רצף כזה. במקרה שלנו נרשום 3 ונקבל ... $babababbab$. כעת, חוזרים על הפעולה עם b במקום a. הפעם נרשום 1 ונקבל את ... $aaba$.

המספרים שרשמנו הם המקדמים בפיתוח יחס המחזורים לשבר משולב. אצלינו למשל נקבל ש bקורה בערך כל $4 + \frac{1}{1+\cdots} \approx 5$ פעמים. אם נמשיך בתהליך נקבל קירוב טוב יותר כמובן, ומסתבר שכך מתקבל הקירוב ה**טוב ביותר** עם מכנה עד גודל נתון. לכן לוח השנה העברי כ"כ מוצלח.

דרך נוספת לתאר את התהליך הוא באמצעות ציור. נצייר במע' צירים ישר שהשיפוע שלו הוא יחס המחזורים. כל פעם שהוא חותך ציר אופקי נרשום a וכל פעם שהוא חותך ציר אנכי נכתוב b. זו הסדרה שתיארנו קודם.

<u>משולש שווה צלעות עם קודקודים שלמים.</u>

כולכם בוודאי יודעים שאין משולש שווה צלעות עם קודקודים שלמים (למה?). אבל אתם טועים. המשולש הבא נראה לחלוטין שווה צלעות:

[להוסיף תמונה של משולש שקודקודיו $(0,0), (0,8), (4,7)$]

איך זה קרה? למעשה הטענה פה היא ש- $\sqrt{3} = \tan(60°) \approx \frac{7}{4}$ כי זה משולש עם גובה באורך 7 ובסיס באורך 8.

באמת מתקיים כי $|\sqrt{3}-\frac{7}{4}|=|\frac{\left(3-\frac{49}{16}\right)}{\sqrt{3}+\frac{7}{4}}|<\frac{1}{32}$ שזה הרבה יותר קטן מהמכנה 4, ולכן המשולש נראה כ"כ דומה. אבל איך קיבלנו את הקירוב הזה? **שבר משולהב.** את החישוב נבצע בטבלא, כאשר כל פעם נרשום

חלק שבור	חלק שלם	מספר
	1	
	1	
	2	
	1	

בעמודה הימנית את ההופכי של המספר בעמודה השמאלית של השורה הקודמת.

כלומר $\sqrt{3}\approx 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\dots}}}=1+\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)}=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$.

שמתם לב שהפיתוח למעלה יוצא מחזורי? זה לא מקרי. למעשה, הפיתוח מחזורי בדיוק למספרים מהצורה $a+\sqrt{d}b$ עבור מספרים רציונליים a,b,d.

<u>אלגוריתם אוקלידס:</u>

מה יקרה אם ננסה לפתח לשבר משולב את המספר הרציולי $\frac{a}{b}$?

נכון! מקבלים בדיוק את אלגוריתם אוקלידס. יכולנו לחשוב גם על אלגוריתם יותר נאיבי לחישוב מחלק משותף מקסימלי, כזה שבו כל פעם

מחסרים את המספר הקטן מהמספר הגדול. אלגוריתם כזה יתאים לקירובים דומים לשבר משולב שנקראים **טורי פארי.**

<u>טורי פארי</u>

נניח שרוצים לקרב מספר t. נניח שכבר מצאנו קירובים מלמעלה ומלמטה $\frac{a}{b} < t < \frac{c}{d}$. נשים לב, כי מתקיים $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$(תרגיל!).

אם $t > \frac{a+c}{b+d}$ נעדכן את הקירוב התחתון להיות $\frac{a+c}{b+d}$ אחרת, נחליף בו את הקירוב העליון. לסדרת הקירובים המתקבלת קוראים **טורי פארי**.

אנו נוכיח:

משפט: נניח כי הקירוב התחתון $\frac{a}{b} < t$ הוא אחד מקירובי פארי התחתונים של x. אז $\frac{a}{b}$ הוא הקירוב הטוב ביותר של t מלמטה עם מכנה עד b. באופן דומה, אם $\frac{a}{b} > t$ הוא קירוב פארי מלמעלה של t אז הוא הקירוב הטוב ביותר של x עם מכנה עד b.

כאן בקירוב **טוב** כוונתנו לקירוב שממזער את השגיאה היחסית המוגדרת להיות

$$|b| \left|x - \frac{a}{b}\right| = |bx - a|.$$

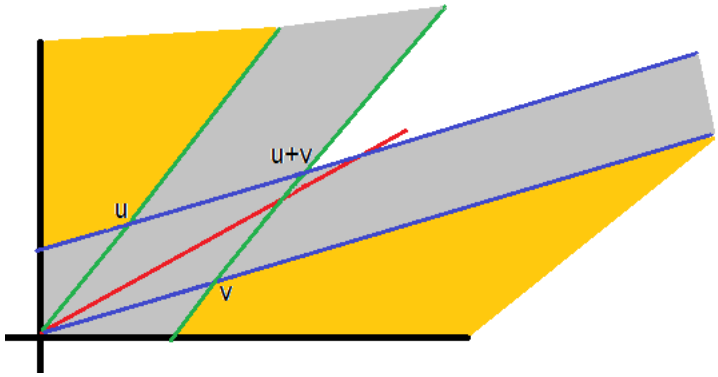
על מנת להוכיח את המשפט, ננסה להסביר את קירובי פארי בדרך גיאומטרית. נצייר ישר ששיפועו x ועובר בראשית.

כעת, נצייר שני ווקטורים שייצגו את קירובי פארי

$v = (1,0)$ ו-$u = (0,1)$. הקירוב $\frac{a}{b}$ ייוצר ע"י הווקטור $v = (a, b)$ ואז השגיאה היחסית מתכונתית למרחק של v מהישר.

כעת, אם כבר בנינו את הווקטרים v, u עבור הקירוב הנוכחי, נתבונן בווקטור $u + v$ ונחליף בו את הווקטור מהקירוב הקודם הנמצא איתו באותו צד של הישר.

ניתן לראות כי המקבילית הנפרשת ע"י u, v בכל שלב ריקה מנקודות שלמות, שהרי התחלנו ממקבילית כזו וכל פעם הזזנו צלע בווקטור של הצלע השניה, ופעולה זו לא משנה את מספר הנקודות השלמות במקבילית. לכן, בכל שלב של האלגוריתם התמונה שלנו נראית כך



כאשר בתחום האפור אין נק' שלמות, ובתחום הצהוב הקירובים גרועים יותר מהקירובים הנוכחיים מבחינת השגיאה היחסית, שהרי הווקטורים שהם קודקודי המקבילית נמצאים בקצה הקרוב ביותר לישר מבין נק' התחומים הצהובים.

מהתמונה ברור כי הווקטור השלם הראשון שעשוי לשפר את אחד הקירובים u, v הוא הווקטור $u + v$, שהוא גם קירוב פארי. זה מסיים את ההוכחה.

ניתן להסיק מספר מסקנות מהתמונה הנ"ל. למשל, קירובי פארי העליונים עוברים בדיוק על הנק' שעל שפת הקמור של קבוצת הנקודות שמעל לקו. באופן דומה, הקירובים התחתונים עוברים בדיוק על נק' השפה של הקמור של הנקודות שמתחת לקו.

<u>שבר משולב ושגיאה יחסית:</u>

ההבדל בין שבר משולב לטורי פארי, זה שבטורי פארי אנחנו מתעניינים בקירובים הטובים ביותר מלמעלה ומלמטה לחוד, בעוד שבשבר משולב אנחנו מתעניינים בקירוב הטוב ביותר עם מכנה עד גודל נתון, ללא תנאים על הצד ממנו מקרבים את המספר.

איך ניתן לחשוב על שבר משולב באופן גיאומטרי?

דרך אחת לנסח זאת, היא שיש לנו ישר $y = tx$ ואנחנו מבצעים את הפעולות של שבר משולב על t ורואים מה קורה לתמונה.

אם נתרגם את הפעולות של שבר משולב לתמונה, נקבל כי כל פעם אנחנו מטים את הישר מטה כך שנק' החיתוך שלו עם הישר $x = 1$ קטנה מ-1, כלומר הזווית שלו עם ציר x קטנה מ-$45°$, ואז מחליפים בין הצירים וממשיכים לפעולה הבאה.

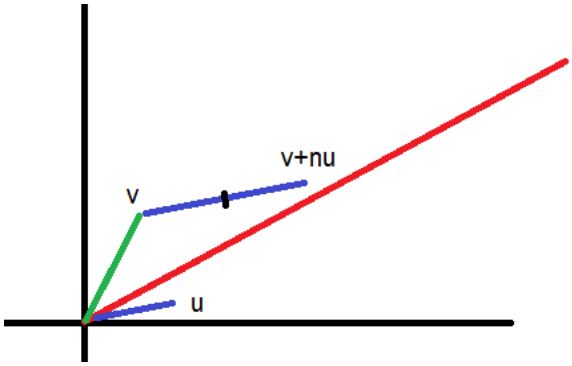
במקום לחשוב על ישר שכל פעם מסיטים ומשקפים, ניתן לקבוע את הישר ולשנות את הצירים. מה שמקבלים דומה מאוד לקירובי פארי.

נניח שכבר חסמנו את הישר שלנו בין שני ווקטורים v, u ע"י השבר המשולב, כל שלמשל v מעל לישר, u מתחת, ו- u הוא הקירוב האחרון שחושב.

זה אומר ש-$v + u$ בהכרח מעל לישר, כי כל פעם אנחנו הסטנו את הישר עד שלא יכולנו לעשות זאת יותר מבלי שיחרוג מהרביע הראשון.

כעת, נתבונן בסדרה $v + u, v + 2u, \ldots$. האיבר הראשון מתחת לישר, ולכן יש $n > 0$ כך ש-$v + nu$ מעל לישר אבל $v + (n + 1)u$ מתחתיו. בשבר משולב, אנחנו מחליפים את u ב-$nv + u$ וכך מקבלים את הקירוב הבא.

בבירור השברים המשולבים עוברים על כל הקירובים שטור פארי עוברים עליהם, אבל הפעם אנחנו מחליפים את הקירוב האחד לפני האחרון בקירוב פארי הראשון שמשפר גם את הקירוב העליון האחרון וגם את הקירוב התחתון האחרון, וכך מקבלים את הקירוב הטוב ביותר עד כה.



מהתמונה ניתן להסיק מסקנות מעניינות על שברים משולבים.

ראשית, אם $\frac{p_n}{q_n}$ השבר ה-n בפיתוח לשבר משולב, אז מקבלים $(p_{n+1}, q_{n+1}) = (p_n, q_n) + a_n(p_{n-1}, q_{n-1})$. נסו להוכיח נוסחא זו מתוך ההגדרה האלגברית!

כמו כן, המקבילית הנפרשת ע"י (p_n, q_n) ו- (p_{n+1}, q_{n+1}) ריקה מנקודות שלמות ועם קודקודים שלמים, ולכן שטחה 1 (למה?).

מנוסחא לשטח מקבילית נקבל $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = \pm 1$.

כמו כן, הקירובים בשבר משולב מקרבים את המספר מלמעלה ומלמטה לסירוגין. בפרט

ולכן במונחי השגיאה היחסית נקבל $|p_n - q_n t| \leq \frac{1}{q_{n+1}}$. אי שוויון זה מסביר את איכות הקירובים שראינו עד כה, שהרי בבירור המכנה הבא q_{n+1} גדול תמיד מ-q_n ולכן השגיאה האבסולוטית היא לפחות ריבועית במכנה!

<u>איכות הקירוב: זריקת כדורים לתאים</u>

את התוצאה האחרונה ניתן להסביר בדרך נוספת. ראינו, כי השבר המשולב הוא הקירוב הטוב ביותר עם מכנה עד גודל נתון מבחינת השגיאה היחסית.

נניח שברצוננו לקרב מספר t באמצעות מספר רציונלי עם מכנה עד M.

נתבונן במספרים $\{mt\}$ עבור $0 \leq m \leq M$. אלה $M + 1$ מספרים בקטע $[0,1]$ ולכן יש לפחות שניים שהמרחק ביניהם לכל היותר $\frac{1}{M}$.

כלומר, $|\{m_1 t\} - \{m_2 t\}| \leq \frac{1}{M}$. אבל

$$|\{(m_1 - m_2)t\}| \leq |\{m_1 t\} - \{m_2 t\}|$$

ולכן אם נסמן $m = m_1 - m_2$ נקבל $|\{mt\}| \leq \frac{1}{M}$. מכיוון ו-$\{mt\} = mt - n$ עבור $n = \lfloor mt \rfloor$ ומצאנו קירוב עם מכנה לכל היותר M ושגיאה

יחסית לכל היותר $\frac{1}{M}$. בפרט, השבר המשולב מקיים כי השגיאה היחסית שלו חסומה ע"י המכנה שלו, כפי שכבר ראינו מהגישה הגאומטרית.

<u>פסנתר:</u>

איך בונים פסנתר? כדי לאפשר נגינה באוקטבות שונות, צריך שהתדרים של המיתרים השונים יהוו סדרה הנדסית, כך שהיחסים בין מיתרים במרווחים קבועים ונתונים יהיו זהים. כדי לקבל צליל יפה, רצוי שהיחסים בין תדרים של מיתרים שונים יהיו מספרים רציונליים קטנים.

למשל, היינו שמחים לו יכולנו למצוא סדרה הנדסית שבה מופיעים המספרים 2,3,5. לצערנו, אין סדרה כזו (למה?).

אבל לא נתייאש, הרי כבר ראינו שמתמטית אין משולש שווה צלעות עם קודקודים שלמים, אבל בפועל ניתן לצייר אחד. באופן דומה, ננסה לבנות

חלק שבור	חלק שלם	מספר
	1	
	1	
	1	
	2	
...	*2*	

סדרה הנדסית שבה מספרים **קרובים מאוד** ל-2,3,5.

קיבלנו את הקירוב $[1,1,1,2,2] = \left[1,1,1,\frac{5}{2}\right] = \left[1,1,\frac{7}{5}\right] = \left[1,\frac{12}{7}\right] = \frac{19}{12}$

ובסה"כ $2^{19} \approx 3^{12}$. כעת, נשים לב כי $2^7 = 128 \approx 125 = 5^3$.

אם נסמן כעת $\alpha = \sqrt[12]{2}$ נקבל בקירוב $\alpha^{84} \approx 5^3 \Rightarrow \alpha^{28} \approx 5$.

ננסה כעת לקבל מספרים רציונליים עם מכנים קטנים כחזקות קטנות של α.

נעזר בקירובים הבאים:

חזקה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
שבר											

[להשלים!!!]

<u>משוואות פל:</u>

משוואות פל הן משוואות מהצורה

$x^2 - Dy^2 = 1$.

נשאלת השאלה, כיצד ניתן למצוא פתרונות שלמים למשוואות פל שכאלה. ניתן דוגמא: למשוואה $x^2 - 3y^2 = 1$ יש פתרונות קטנים שקל לנחש: $x = 2, y = 1$ וכן $x = 7, y = 4$ פתרונות.

רגע! המספרים $7,4$ כבר הוזכרו בהקשר של $\sqrt{3}$ והשתמשנו בעובדה ש- $7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1$ כדי להסביר למה המשולש שציירנו כ"כ מוצלח (בתאוריה ☺). מסתבר שכך זה עובד באופן כללי. אם D מספר כלשהו שלא מתחלק בריבוע גדול מ-1, ניתן לפתור את משוואת פל באמצעות הפיתוח של D לשבר משולב. זה הגיוני כי מהמשוואה נובע $x^2 \approx Dy^2$ ולכן נצפה כי $\frac{x}{y}$ יהיה קירוב רציונלי טוב ל-$\sqrt{D}$.

נדגים את השיטה גם עם מספר יותר גדול, כדי להשתכנע שהיא עובדת:

ניקח את $D = 19$.

חלק שבור	חלק שלם	מספר

	4	
	2	
	1	
	3	
	1	
	2	
	…	*…*

בדוגמא זו השתמשנו הרבה פעמים בזהות הפשוטה

$$\frac{1}{(\sqrt{19}-n)} = \frac{\sqrt{19}+n}{19-n^2}.$$

נשים לב כי בשורה האחרונה קיבלנו חזרה את $\sqrt{19}$ מבחינת החלק השבור, וחלק שלם גדול פי 2. זו תופעה כללית, וכדי לקבל פתרון צריך לעצור בצעד הקודם.

נוודא זאת מקרה שלנו:

$$[4,2,1,3,1,2] = \left[4,2,1,3,\frac{3}{2}\right] = \left[4,2,1,\frac{11}{3}\right] = \left[4,2,\frac{14}{11}\right] = \left[4,\frac{39}{14}\right] = \left[4,\frac{39}{14}\right] = \frac{170}{39}$$

ואכן

$$170^2 - 19 \cdot 39^2 = 28900 - 19 \cdot 1521 =$$

עד כאן הפעם ☺