אי-שוויונים קומבינאטוריים

1. א. נתונה סדרה $\{a_i\}_{i=1}^n$ ותמורה שלה $\{b_i\}_{i=1}^n$. הוכח: $\sum_{i<j}(a_i-b_i)(a_j-b_j)\le 0$.

ב. תחת הנחה $\sum a_i=1=\sum b_i$, הוכח כי $\sum_{i<j}a_ia_j+\sum_{i<j}b_ib_j+\sum_i a_ib_i\le 1$.

2. עבור $x_1,...,x_n\in[0,1]$. מצא את המקסימום של הביטוי $\sum_{cyc}(x_i-x_ix_{i+1})$.

3. עבור $x_0>x_1>x_2>...>x_n$ הוכח כי $x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+...+\frac{1}{x_{n-1}-x_n}\ge x_n+2n$.

4. בהינתן $n>2$, והמספרים $x_1,x_2,...,x_n\ge 0$, הוכח כי $\sqrt[n]{x_1x_2\cdot...\cdot x_n}+\frac{\sum_{i<j}|x_i-x_j|}{n}\ge\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.

5. עבור מספרים ממשיים כלשהם $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_{2n}$ הוכח את האי-שוויון:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_{2n})^2\ge 4n(x_1x_{n+1}+x_2x_{n+2}+\ldots+x_nx_{2n}).$$

6. א. עבור $x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$, כאשר $0<a<b$, אז

$$(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)\le\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2.$$

ב. עבור $x_1,...,x_n\ge 0$ הוכח כי

$$\left(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+...+\frac{x_n}{n}\right)(x_1+2x_2+3x_n+...+nx_n)\le\frac{(n+1)^2}{4n}(x_1+x_2+...+x_n)^2.$$

ג. עבור $n\ge 3$, $x_1,...,x_n>0$, מתקיים $(x_1+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}\right)+1\ge n^2$.

הוכח כי x_i,x_j,x_k הן צלעות משולש.

7. בכל משבצת של טבלה רשום מספר ממשי. משבצת תקרא אוכף, אם המספר שלה מקסימאלי בעמודה, ומינימאלי בשורה. ניקח טבלה בה במשבצת (i,j) רשום מספר $\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}$, כאשר a_i,b_i מספרים ממשיים, p_i, q_i מספרים חיוביים. הוכח כי בטבלא זו יש אוכף.

↓ המשך בעמוד הבא

8. מצא c הגדול ביותר, עבורו לכל n ולכל $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n \in [1,2]$ המקיימים $\sum a_i^2 = \sum b_i^2$ יתקיים $\sum \frac{a_i}{b_i} < c \cdot n$.

9. הוכח כי $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2012^2}+\frac{1}{2013^2}} < 1006.5$.

10. נתונים מספרים חיוביים המקיימים $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. הוכח כי $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{x_i}-1} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_i}-1}}$.

11. נתונה סדרת ממשיים $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימת $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ לכל $i,j \geq 1$.

הוכח כי $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + ... + \frac{a_n}{n} \geq a_n$.

12. בהינתן $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, ובנוסף $r_1 \geq r_2 \geq ... \geq r_n \geq 0$, הוכח כי

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \min(r_i, r_j) \geq 0.$$

13. נתון כי $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$. נסמן $m = \min(x_1, x_2, ..., x_n)$, $M = \max(x_1, x_2, ..., x_n)$.
הוכח כי $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq -nmM$.

14. הוכח שאם מספרים ממשיים $a_1,...,a_n$ מקיימים את התנאי

$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq \sqrt{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)}$, אז אף אחד מהמספרים אינו שלילי.

15. מצא מספר C ממשי מינימאלי, עבורו לכל סדרה אינסופית של חיוביים $\{x_i\}$ המקיימת $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq x_{n+1}$ לכל n, יתקיים גם $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n} \leq C\sqrt{x_1 + x_2 + ... + x_n}$ לכל n.

16. בהינתן $a,b,x_1,x_2,...,x_n > 0$ המקיימים $\sum x_i = 1$, ופונקציה $f(x) = (a+x)(b+x)$,
מצא את הערך המרבי של $\sum_{i<j} \min\left(f(x_i), f(x_j)\right)$.

17. נתונים $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_{100} \geq 0$ המקיימים $a_1^2 + a_2^2 \geq 100$ ובנוסף
$a_3^2 + a_4^2 + ... + a_{100}^2 \geq 100$. מצא את הערך המינימאלי של $a_1 + a_2 + ... + a_{100}$?

18. מספרים $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ מקיימים $\sum a_i = 3k$, $\sum a_i^2 = 3k^2$, $\sum a_i^3 > 3k^3 + k$. הוכח כי קיימים i,j עבורם $a_i > a_j + 1$.

19. נתונים 5 מספרים חיוביים שונים שסכום ריבועיהם שווה לסכום כל 10 המכפלות של הזוגות שלהם.

א. הוכיחו שמבין 5 המספרים יש שלשה אחת לפחות של מספרים שלא יכולים להיות צלעות של משולש.

ב. הוכיחו שיש לפחות 6 שלשות כאלה (שלשות ששונות רק בסדר המספרים נחשבות זהות).

20. נתון n טבעי. מצא את המספר הממשי k הגדול ביותר, עבורו לכל n מספרים ממשיים $x_1, x_2, ..., x_n$ מתקיים אי-השוויון:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 + x_n^2} \geq k \cdot \min\left(|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, ..., |x_{n-1} - x_n|, |x_n - x_1|\right).$$

(התשובה יכולה להיות תלויה ב- n).

21. הוכיחו כי לכל n מספרים ממשיים $x_1, x_2, ..., x_n$ מתקיים אי-השוויון:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i + x_j| \geq \sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

בהצלחה!