## חלוקת עוגות

**השאלה השאלתית.** נתונות $m$ עוגות, משקל כל עוגה 1 ק"ג. רוצים לחלק את העוגות בין $n$ אנשים. לא רוצים שיהיו חלקים קטנים בחלוקה; במילים אחרות רוצים שהחתיכה הכי קטנה שתיווצר תהיה גדולה ככל האפשר.

התשובה לשאלה זו תסומן $f(m,n)$.

**1.** נסו לבדוק מקרים קטנים קלים (?), כמו:

א. $f(5,7)$

ב. $f(7,9)$

ג. $f(8,9)$

ד. $f(11,14)$

ה. $f(14,17)$

ו. $f(23,29)$

ז. $f(31,52)$

**2.** בהינתן $f(m,n)$, מצאו את $f(n,m)$.

---

## מרגע זה נניח תמיד כי $m<n$.

**3.** הוכיחו כי אם $n \nmid m$ אז $f(m,n)\le\frac{m}{2n}$.

**4.** א. הוכיחו כי אם $\frac{3}{4}<\frac{m}{n}<1$ אז $f(m,n)\le\frac{m}{n}-\frac{1}{2}$.

ב. הוכיחו כי אם $\frac{2}{k+1}<\frac{m}{n}<1$ אז $f(m,n)\le\frac{m}{n}-\frac{1}{k}$ לכל $k>2$.

**5.** א. הוכיחו כי $f(m,n)\ge\frac{m}{3n}$.

ב. הוכיחו כי עבור $\frac{2}{3}<\frac{m}{n}\le\frac{3}{4}$ בסעיף א' מושג שוויון.

ג*. נסו להבין מתי מושג שוויון בסעיף א'.

**6.** יש $m$ עוגות ו-$m<n$ אנשים, משקל כל עוד 1 ק"ג. צריך לחתוך את העוגות ולחלק בין האנשים באופן שווה, כך שכל אחד יקבל לכל היותר 2 חתיכות וכל עוגה תחולק לכל היותר $k$ חתיכות. עבור אילו $m$ ו-$n$ ניתן לעשות זאת?

**7.** רוצים לקחת $p$ עוגות שוות, לחלק כל עוגה ל-3 חלקים לכל היותר, ולהרכיב מכל החלקים $q$ מנות זהות, כאשר כל מנה מורכבת מ-4 חלקים לכל היותר. עבור אילו זוגות $(p,q)$ זה מתאפשר?

**8.** א. הוכיחו כי אם $\frac{2}{3}>\frac{m}{n}$ אז $f(m,n)\le\frac{1}{4}$.

ב. מתי מושג שוויון בסעיף הקודם?

**9.** בהנחה ש-$\frac{2}{k+1}<\frac{m}{n}<\frac{2}{k}$ מצאו את כל הזוגות $(m,n)$ אז $f(m,n)=\frac{1}{k+1}$.

**10.** א. אם $\frac{1}{2}<\frac{m}{n}<\frac{5}{9}$ אז $f(m,n)=\frac{m}{n}-\frac{1}{3}$.

ב. מתי מושג שוויון בסעיף הקודם?

**11.** נניח כי $\frac{2}{k+1}<\frac{m}{n}<\frac{2}{k}$, כאשר $k\ge 4$. מצאו את כל הזוגות $(m,n)$ עבורן $f(m,n)=\frac{m}{n}-\frac{1}{k}$.

**12.** א. מצאו את $f(m,n)$ כאשר $\frac{7}{12}<\frac{m}{n}<\frac{22}{37}$.

ב. עבור אילו ערכים נוספים של $\frac{m}{n}$ מתקבלת אותה תשובה?

**13.** ***עוגות ממשקלים שונים נתונים.*** בכל סעיף שואלים, מה הגודל המקסימלי של החלק המינימלי.

א. יש שתי עוגות ששוקלות 1 ו-2 וצריך לחלק באופן שווה ל-N אנשים.

ב. יש עוגות ששוקלות 59, 89 ועוד שתי עוגות ששוקלות 41. צריך לחתוך את העוגה הראשונה ל-4 חלקים את השנייה ל-6 ואת שתי האחרות ל-5 כל אחת, ולחלק בין 10 אנשים כך שכל אחד יקבל כמות זהה של חלקי עוגה ומשקל כללי זהה.

ג. יש שתי עוגות ששוקלות 41, שלוש עוגות ששוקלות 35 ו-11 עוגות עם ששוקלות 29. כל אחת מהעוגות הראשונות צריך לחלק ל-5 חלקים, את העוגות ששוקלות 35 צריך לחלק ל-4 חלקים כל אחת ואת השער לשני חלקים כל אחת. לאחר מכאן צריך לחלק את החלקים ל-22 אנשים כך שכל אחד יקבל כמות זהה של חלקי עוגה ומשקל כללי זהה.

**14.** נסו לפתור את השאלה השאלתית עבור:

(117,133), (27,61), (566,643), (3130,6831).

***בתאבון!***