חכמים וקוסמים

1. בשורה עומדים 100 חכמים. על ראשיהם כובעים, כאשר כל כובע יכול להיות באחד מ-100 צבעים ידועים מראש. כל אחד רואה את כל הצבעים חוץ מהצבע שלו. כל אחד מתבקש לנחש את צבע הכובע שלו בקול רם – החל מסוף השורה, מהאיש שרואה את כולם. מי שטועה בניחוש שלו, מוצא להורג. מותר לתאם מראש אסטרטגיה, שתאפשר לכמות מרבית של חכמים לשרוד. כמה מהם ישרדו?

2. המלך זימן שני חכמים. הוא נתן לחכם הראשון 100 כרטיסי נייר ריקים, וציווה עליו לכתוב על כל כרטיס מספר טבעי (המספרים לא חייבים להיות שונים), בלי להראות את הכרטיסים לחכם השני. לאחר מכן החכם הראשון יכול להגיד לחכם השני כמה מספרים שונים, שכל אחד מהם כתוב על אחד הכרטיסים, או שווה לסכום המספרים על חלק מהכרטיסים, אבל בלי להגיד איך הוא יצר כל מספר. החכם השני צריך לגלות את 100 המספרים אשר כתובים על הכרטיסים, ולהוכיח למלך שזאת האופציה היחידה. אם הוא לא יצליח, יערפו לשני החכמים את הראש. אם הוא יצליח לספק את ההוכחה, המלך יתלוש מהזקן של כל אחד מהחכמים מספר שערות ככמות המספרים שהחכם הראשון אמר לחכם השני. כיצד החכמים יכולים להישאר בחיים ולאבד מספר מינימלי של שערות, אם הם לא יכולים לתאם מראש?

3. דרקון תפס את 6 הגמדים. לדרקון יש 7 כובעים ב-7 צבעי הקשת (ידועים מראש). הוא הולך להעביר להם בבוקר מבחן תבונה – הגמדים יעצמו עיניים, הדרקון ישים כובע אחד על ראש של כל גמד ואז הגמדים יתבקשו בו-זמנית לנחש, מה צבע הכובע שלהם. הדרקון מאיים שאם פחות מחצי ינחשו נכון, הוא יוכל את כולם. האם הגמדים יוכלו לשרוד?

4. במעגל עומדים N חכמים. על ראשיהם כובעים, כאשר כל כובע יכול להיות באחד מ-100 הצבעים הידועים מראש. כל אחד רואה את כל הצבעים חוץ מהצבע שלו. כל אחד מתבקש לנחש את צבע הכובע שלו (הם מוסרים את הניחושים בו-זמנית). האם הם יכולים לתאם מראש, כך שלפחות אחד מהם בהכרח יצליח לנחש נכון? (התשובה תלויה ב-N.)

5. על ראשו של כל אחד מ-8 חכמים שמים כובע באחד מ-2017 צבעים (ידועים מראש). כל אחד מסתכל על הכובעים על ראשי חבריו, ולאחר מכן כל אחד רשאי להרים יד ימין, יד שמאל, או את שתי הידיים בו-זמנית (מותר להרים ידיים רק פעם אחד, ובו-זמנית). לאחר מכן כל אחד מקבל דף ועט ויכול לרשום את צבע הכובע שלו על הדף. האם אפשר לתאם מראש אסטרטגיה, כך שכל אחד יוכל לנחש את צבע הכובע שלו?

6. בחפיסה 52 קלפים. ניצן בוחר K קלפים כלשהם ומחביא את החפיסה. בילבו מסתכל על הקלפים, ומחזיר קלף אחד לניצן, ואת הקלפים האחרים מניח על השולחן בשורה בסדר שהוא בוחר. לאחר מכן גנדלף נכנס לחדר, מסתכל על הקלפים שמונחים על השולחן, ואומר לניצן איזה קלף נוסף נבחר.

עבור איזה K קטן ביותר בילבו וגנדלף יכולים לארגן כזה תעלול

א. אם הקלפים מונחים על השולחן עם התמונה קלפי מעלה?

ב. אם מותר גם להניח את הקלפים עם הגב כלפי מעלה?

7. הפעם דרקון תפס 4 גמדים. לדרקון יש כמות לא מוגבלת של כובעים ב-3 צבעים. הוא מושיב את הגמדים במעגל מסביב לדרקון עצמו, הגמדים יעצמו עיניים והוא ישים כובע על ראש של כל גמד. לאחר מכן הגמדים מתבקשים בו-זמנית לנחש את צבע הכובע של עצמם (הם רושמים תשובות על פתקים ומוסרים לדרקון). מכיוון שהדרקון אינו שקוף, גמד רואה רק את שני הגמדים שקרובים אליו ולא את הגמד הנגדי. האם אפשר לדאוג לכך שלפחות גמד אחד ינחש את הצבע שלו?

8. על מנת לעבור את המבחן, 1000 חכמים מסתדרים בשורה. יש כובעים הממוספרים מ-1 עד 1001. כובע אחד מוחבא, ואת האחרים מלבישים על החכמים בסדר אקראי. כל חכם רואה רק את הכובעים של אלה שלפניו. לאחר מכן, כל חכם, לפי הסדר (כאשר האחורי ראשון והקדמי אחרון), אומר בקול רם מספר שלם. כל מספר שאומרים צריך להיות בין 1 ל-1001, אבל אסור להגיד מספר שכבר נאמר. תוצאת המבחן היא כמות החכמים שאמרו את מספר הכובע שלהם. החכמים יודעם מראש את תנאי המבחן ויכולים לסכם איך לפעול.

א. האם הם יכולים להבטיח תוצאה של 500 לפחות?

א. האם הם יכולים להבטיח תוצאה גדולה ממש מ-500?

ב. האם הם יכולים להבטיח תוצאה של לפחות 999?

9. בשורה עומדות N נורות ממוספרות. ניצן יכול להדליק או לכבות כל נורה לפי רצונו. לאחר שניצן מעביר את הנורות למצב כלשהו, בילבו נכנס לחדר. ניצן בוחר מספר שלם מ-1 עד $N+1$ ואומר אותו לבילבו. בילבו יכול (אבל לא חייב) לבקש מניצן לשנות את המצב של נורה אחת. לאחר מכן נכנס לחדר גנדלף, מסתכל על מצב הנורות, ואומר לניצן את המספר שהוא בחר. האם הקסם מתאפשר במקרה של

א. $N=3$? ב. $N=5$? ג. $N=7$?