קואורדינטות בריצנטריות – דף תרגילים

תרגילים בסיסיים

1. מצאו את הקואורדינטות הבריצנטריות של H, G, L.
2. הוכיחו כי I, M, N נמצאות על ישר אחד.
3. הוכיחו את משפט צ'בה.
4. הוכיחו את משפט מנלאוס.
5. הוכיחו את משפט גאוס (אמצעי אלכסונים במרובע שלם נמצאים על ישר).
6. מצאו את הקואורדינטות הבריצנטריות של Tr_1, Tr_2 (נקודות טוריצ'לי).
7. מצאו את משוואת המעגל החוסם.
8. מצאו את משוואות המעגל החסום, המעגל החסום מבחוץ, ומעגל תשע הנקודות.
9. מצאו את משוואת המשיק למעגל החוסם ב-A.

בעיות מתקדמות

1. (IMO 2012/1) יהי ABC משולש, ויהי J מרכז המעגל החסום מבחוץ המתאים לקודקוד A. מעגל זה משיק ל-BC ב-M, ול-AB, AC ב-K, L, בהתאמה. נסמן ב-F את החיתוך LM ו-BJ, וב-G את החיתוך של KM ו-CJ. יהי S החיתוך של AF ו-BC, ויהי T החיתוך של AG ו-BC. הוכיחו כי M אמצע ST.
2. (מחנה חורף 2012) נתון משולש ABC. קודקודיו מחלקים את המעגל החוסם ל-3 קשתות, ואמצעי הקשתות הללו יסומנו P, Q, R (של BC, AC, AB בהתאמה). הקטע PQ חותך את הקטע BC ב-U ואת הקטע AC ב-V. באופן דומה נגדיר W, X, Y, Z. הוכח כי UX, VY, WZ נחתכים בנקודה אחת.
3. במשולש ABC הישרים AK, BL הם גבהים, AU, BV חוצי זוויות, ו-P, Q נקודות ההשקה של המעגל החסום לצלעות BC, AC. הוכיחו כי KL, UV, PQ נחתכים בנקודה אחת.
4. (IMO Shortlist 2015/G4) יהי ABC משולש חד-זווית ותהי M אמצע AC. המעגל ω עובר ב-B, M וחותך את AB, BC ב-P, Q בהתאמה. תהי T נקודה כך ש-$BPTQ$ מקבילית. נניח כי T נמצאת על המעגל החוסם של ABC. מצאו את כל הערכים האפשריים של $\frac{BT}{BM}$.
5. (USAMO 2016, 3) יהי ABC משולש חד-זווית, ויהיו I_B, I_C, O מרכז המעגל החוסם, מרכז המעגל החסום מבחוץ ל-B, ומרכז המעגל החסום מבחוץ ל-C. נקודות E, Y נבחרו על הקטע AC כך ש $\angle ABY = \angle CBY$ ו-$BE \perp AC$. באופן דומה נבחרו F, Z על AB כך ש-$\angle ACZ = \angle BCZ$ ו-$CF \perp AB$. הישרים I_BF, I_CE נחתכים ב-P. הוכיחו כי OP, YZ מאונכים.
6. (IMO Shortlist 2011/G5) יהי ABC משולש שמרכז המעגל החסום בו זה I והמעגל החוסם שלו הוא ω. יהיו D, E נקודות החיתוך של ω עם הישרים AI, BI. המיתר DE חותך את AC ב-F ואת BC ב-G. תהי P נקודת החיתוך של הישר מ-F שמקביל ל-AD והישר מ-G שמקביל לBE. נניח כי המשיקים ל-ω ב-A, B נחתכים ב-K. הוכח כי הישרים AE, BD, KP נחתכים בנקודה אחת או מקבילים.
7. (IMO Shortlist 2005, G5) יהי ABC משולש, H מפגש הגבהים, M אמצע BC. תהי D על AB ו-E על AC כך ש-$AE = AD$ ו-D, H, E על ישר אחד. הוכיחו כי HM מאונך למיתר המשותף של המעגלים החוסמים של ADE, ABC.
8. (משפט פוירבאך) הוכיחו כי מעגל תשע הנקודות משיק למעגל החסום.