דף שאלות – דוגמאות קומבינטוריות

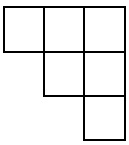
1. כמה תתי קבוצות שונות יש למספרים 1...2013 כך שסכום המספרים בכל תת קבוצה שווה ל-2013 מודולו 2048?

2. האם ניתן לסדר 5773 מספרים בשורה, כך שלכל שני מספרים בשורה זאת, הממוצע שלהם לא נמצא ביניהם?

3. בכמה דרכים ניתן למלא לוח שחמט במספרים 1,1- כך שהסכום של כל ריבוע 2 על 2 יהיה 0 ?

4. מהי הכמות המרבית של משבצות שניתן לסמן
   א. בטבלה 12×12,
   ב. בטבלה 10×10,
   כל שלא יהיו אף 4 משבצות מסומנות, שיוצרות מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים?

5. מרדכי וצבי משחקים במשחק הבא. בתחילת המשחק יש לוח משבצות $m\times n$, כולו לבן, כאשר $n\le 9$. בשלב הראשון מרדכי משלם לצבי סכום של s שקלים, וצבי חייב לצבוע בדיוק s משבצות בכחול (צבי יכול לבחור בעצמו איזו משבצות הוא צובע). אחרי שצבי מסיים עבודות הצביעה, מרדכי יכול להחליף את סדר השורות של הטבלא וגם את סדר העמודות של הטבלא, לפי בחירתו. המטרה של מרדכי היא שבסופו של דבר בפינה הימנית העליונה תהיינה 6 משבצות בצבע כחול: המשבצת הפינתית, שתי משבצות הסמוכות לה, ו-3 משבצות הסמוכות לשתי המשבצות הללו (כמו בציור).



כמה מרדכי יצטרך לשלם לצבי, בהנחה ששניהם אינם ילדים מפגרים?
על מנת למנוע פיגור שכלי, נניח כי $m,n>2$. התשובה תלויה ב-m,n.

6. עבור איזה N טבעי ניתן לרשום את המספרים מ-1 עד N בשורה, כל מספר פעמיים, כך שמרחק בין K ל-K יהיה K? כמו למשל 41134232.

7. מצא את המספר המרבי של שלשות מספרים טבעיים a_i, b_i, c_i המקיימות:
   א. $a_i + b_i + c_i = n$ לכל i.
   ב. אם $i\ne j$, אז $a_i\ne a_j$, $b_i\ne b_j$ ו- $c_i\ne c_j$.
   (התשובה היא פונקציה של n, שהוא מספר טבעי נתון.)

בהצלחה!