שובך יונים

1. כל נקודת אמצע של משבצת בלוח שחמט נצבעה בצבע אדום. האם ניתן לחלק את הלוח על ידי 13 ישרים כך שבכל חלק תהיה נקודה אדומה אחת לכל היותר?
2. האם בכל מצולע קמור עם 2n קדקודים יש אלכסון שלא מקביל לאף אחת מצלעותיו?
3. על המישור סומנה נקודה. דוד רוצה לצייר מספר מעגלים שלא מכילים את הנקודה כך שכל קרן המתחילה בנקודה המסומנת תחתוך לפחות שני מעגלים. האם דוד יצליח עם חמישה מעגלים? ועם ארבעה?
4. נתונה קבוצה A של 101 מספרים שלמים בין 1 ל-1000000. הראו שקיימים 100 מספרים שונים $a_1, a_2, ..., a_{100}$ בין 1 ל-1000000, כך שהקבוצות $A + a_i$ כולן זרות.
5. קבוצה M מורכבת מ-1985 מספרים שלמים חיוביים שונים שכל מחלק ראשוני של כל אחד מהם קטן מ-24. הראו כי ב-M יש תת-קבוצה של 4 מספרים שמכפלתם היא חזקה רביעית שלמה.
6. נתון לוח משבצות אינסופי וצורת קרטון עם שטח קטן מ-1. האם ניתן למקם את הקרטון על הדף כך שהוא לא יכסה אף נקודה שלמה?
7. על קטע שאורכו 10 נצבעו מספר קטעים כך שאין שתי נקודות צבועות שהמרחק ביניהן שווה ל-1. הוכח כי האורך הכולל של כל הקטעים הצבועים לא עולה על 5.
8. א. הראו שבכל קבוצה של N מספרים שלמים, יש תת-קבוצה לא ריקה שסכום המספרים בה מתחלק ב-N.

   ב. הראו שבכל קבוצה של N-1 מספרים שלמים, או שיש תת-קבוצה לא ריקה שסכום המספרים בה מתחלק ב-N, או שההפרש בין כל שני מספרים בקבוצה הנתונה מתחלק ב-N.
9. נתונים שני מעגלים עם היקף 100 כל אחד. על המעגל הראשון סומנו 100 נקודות ועל המעגל השני סומנו מספר קשתות כך שאורכן הכולל קטן מ-1. האם ניתן לשים את שני המעגלים זה על זה כך שאף נקודה מסומנת לא תהיה על אף קשת מסומנת.
10. בעיגול שרדיוסו 16 סומנו 650 נקודות. האם ניתן לצבוע טבעת עם רדיוס פנימי 2 ורדיוס חיצוני 3 כך שבטבעת יהיו לפחות 10 נקודות מסומנות?
11. קדקודיו של דף משבצות אינסופי נצבעו בשלוש צבעים. האם קיים משולש מונוכרומטי ישר זווית ושווה שוקיים?
12. נתונה חפיסה של 8 קלפים. על כל קלף כתוב מספר שלם. הוכח שניתן לחלק חלק מהקלפים ליוסי ודנה כך שכל אחד מהם יקבל אותו מספר קלפים, וההפרש בין סכום מספרי הקלפים של יוסי לבין סכום מספרי הקלפים של דנה מתחלק ב-67.
13. באולימפיאדה במתמטיקה השתתפו 21 בנים ו-21 בנות. כל אחד פתר לכל היותר 6 שאלות ועבור כל זוג בן-בת יש לפחות שאלה אחת ששניהם פתרו. הוכח כי יש שאלה שלפחות 3 בנים ו-3 בנות פתרו. *בהצלחה!*