חשבון שאריות

1. א. נתונים 7 מספרים שלמים, שסכום כל 6 מהם מתחלק ב-5. הוכיחו, שכל המספרים הנתונים מתחלקים ב-5.
ב. נתונים 11 מספרים שלמים, שסכום של כל 10 מהם מתחלק ב-5. האם בהכרח כל המספרים הנתונים מתחלקים ב-5? האם סכום של כל 5 מספרים מבין המספרים הנתונים מתחלק ב-5?

2. בהנחה ש-$a^2+9ab+b^2$ מתחלק ב-11, הוכיחו שגם a^2-b^2 מתחלק ב-11.

3. הראו כי אפשר לחתוך קובייה ל-5777 קוביות.

4. מצאו את המחלק המשותף המרבי של 111111 ושל 1111111111.

5. הראו כי קיים מספר פיבונאצ'י שמסתיים ב-999.

6. הוכיחו שאם $6n+11m$ מתחלק ב-31, אז כך גם $n+7m$.

7. הוכיחו כי $(-7)^{2^n}+6^{2^n}-1$ מתחלק ב-43 לכל n טבעי.

8. יש כדורים משלושה צבעים: אדום, ירוק וכחול. מותר להחליף חמישה כדורים ירוקים בכדור אדום, או להחליף שלושה כדורים אדומים בכדור כחול, או להחליף שני כדורים כחולים בכדור ירוק. בהתחלה ישנם 5771 כדורים מכל צבע. מבצעים החלפות כל עוד ניתן. כמה כדורים מכל צבע יישארו בסוף?

9*. $3n+1=a^2$, $4n+1=b^2$. הוכיחו כי n מתחלק ב-56.

10. הוכיחו כי לכל ראשוני p מתקיים $(p-1)!+1$ מתחלק ב-p.

11. הוכיחו כי לכל ראשוני p המונה של שבר $\frac{a}{b}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{p-1}$ מתחלק ב-p.

12. הראו כי $\binom{2p}{2}-2$ מתחלק ב-p^2 לכל $p\geq 5$ ראשוני.

בתאבון!