רב איבר שלם

1. האם קיים פולינום P לא קבוע בעל מקדמים שלמים, כך ש-$P(n)$ ראשוני לכל n טבעי?

2. נתון פולינום P לא קבוע בעל מקדמים שלמים. מספר ראשוני q יקרא שמח, אם קיים n טבעי עבורו $q \mid P(n)$. הראו שיש אינסוף ראשוניים שמחים.

3. פולינום P עם מקדמים שלמים ממעלה n מקיים: $P(m)$ מתחלק ב-k לכל m שלם. האם בהכרח יש מחלק משותף גדול מ-1 לכל המקדמים? התשובה תלויה ב-k ו-n.

4. המורה מתכוון לתת לילדים מטלה מהסוג הבא. הוא יבחר פולינום מתוקן $P(x)$ עם מקדמים שלמים ממעלה 2017. לאחר מכן הוא ייתן להם k מספרים שלמים $n_1, n_2, ..., n_k$ ואת ערך המכפלה $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot ... \cdot P(n_k)$. המטלה היא לשחזר את הפולינום. מהו ה-k הקטן ביותר עבורו ניתן להרכיב מטלה מסוג זה עם תשובה יחידה?

5. הראו שהפולינום $x^n + 5x^{n-1} + 3$ אי-פריק בשלמים.

6. יהא $P(x)$ פולינום בעל מקדמים שלמים ומעלה $n > 1$. הראו שלכל משוואה מהסוג $x = P\left(P\left(P\left(...P(x)...\right)\right)\right)$ יש לכל היותר n שורשים שלמים.

7. נתונים מספרים שלמים $a_1 < a_2 < ... < a_n$. הוכיחו כי

א. הפולינום $(x-a_1)^2 (x-a_2)^2 \cdot ... \cdot (x-a_n)^2 + 1$ אי-פריק בשלמים.

ב. לאיזה n הפולינום $(x-a_1)(x-a_2) \cdot ... \cdot (x-a_n) + 1$ בהכרח אי-פריק בשלמים?

8. נתון פולינום P בעל מקדמים שלמים. ידוע שלכל שני מספרים טבעיים שונים a ו-b, אם $P(a)$ זר ל-$P(b)$ אז a זר ל-b. הראו כי $P(0) = 0$ או שקיים $d > 1$ שלם עבורו $P(n)$ מתחלק ב-d לכל n שלם.

בהצלחה!