רב איבר שלם

1. האם קיים פולינום P לא קבוע בעל מקדמים שלמים, כך ש-$P(n)$ ראשוני לכל n טבעי?

2. נתון פולינום P לא קבוע בעל מקדמים שלמים. מספר ראשוני q יקרא שמח, אם קיים n טבעי עבורו $q \mid P(n)$. הראו שיש אינסוף ראשוניים שמחים.

3. פולינום P עם מקדמים שלמים ממעלה n מקיים: $P(m)$ מתחלק ב-k לכל m שלם. האם בהכרח יש מחלק משותף גדול מ-1 לכל המקדמים? התשובה תלויה ב-k ו-n.

4. המורה מתכוון לתת לילדים מטלה מהסוג הבא. הוא יבחר פולינום מתוקן $P(x)$ עם מקדמים שלמים ממעלה 2017. לאחר מכן הוא ייתן להם k מספרים שלמים $n_1, n_2, ..., n_k$ ואת ערך המכפלה $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot ... \cdot P(n_k)$. המטלה היא לשחזר את הפולינום. עבור איזה k קטן ביותר ניתן להרכיב מטלה מסוג זה עם תשובה יחידה?

5. הראו שפולינום $x^n + 5x^{n-1} + 3$ אי-פריק בשלמים.

6. יהא $P(x)$ פולינום בעל מקדמים שלמים ומעלה $n > 1$. הראו שלכל משוואה מסוג $x = P\left(P\left(P\left(...P(x)...\right)\right)\right)$ יש לכל היותר n שורשים שלמים.

7. נתונים מספרים שלמים $a_1 < a_2 < ... < a_n$. הוכיחו כי

א. הפולינום $\left(x-a_1\right)^2\left(x-a_2\right)^2 \cdot ... \cdot \left(x-a_n\right)^2 + 1$ אי-פריק בשלמים.

ב. לאיזה n הפולינום $\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right) \cdot ... \cdot \left(x-a_n\right) + 1$ בהכרח אי-פריק בשלמים?

8. נתון פולינום P בעל מקדמים שלמים. ידוע שלכל שני מספרים טבעיים שונים a ו-b, אם $P(a)$ זר ל-$P(b)$ אז a זר ל-b. הראו כי $P(0) = 0$ או שקיים $d > 1$ שלם עבורו $P(n)$ מתחלק ב-d לכל n שלם.

9. לכל $n \geq 0$ שלם קיים $k \geq 0$ שלם, כך ש-$P(k) = 2^n$. הראו כי $\deg P = 1$

א. אם P פולינום מתוקן.

ב. אם P פולינום כלשהו עם מקדמים שלמים.

ג*. אם P פולינום כלשהו.

10. תארו את כל הפולינומים עבורם קיימת סדרה אינסופית $\{n_k\}$ של מספרים שלמים, כך ש-$p(n_k) = \alpha^k$, כאשר $\alpha > 1$ מספר רציונאלי.

11. לכל n שלם, $P(n)$ הוא ריבוע שלם. הראו שקיים פולינום $Q(x)$ עבורו $P(x) = \left(Q(x)\right)^2$.

12. פולינומים P ו-Q ממעלה אי-זוגית, ולכל x שלם קיים y שלם כך ש-$P(x) = Q(y)$. הראו שקיים פולינום $R(x)$ עבורו $P(x) = Q\left(R(x)\right)$.

בהצלחה!