<u>שאלה:</u>

הוכיחו שלכל פולינום p עם מקדמים שלמים ממעלה $n \geq 1$ מתקיים:

$$\max_{0\leq x\leq 1} |p(x)| > \frac{1}{e^n}$$

<u>הוכחה:</u>

מספיק להוכיח את האי שוויון הבא:

$$\int_0^1 \log|p(x)| \geq -n$$

האי שיוויון המקורי נובע מיידית. נסמן ב-$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ את השורשים של p, וב-m את המקדם המוביל. לכן מתקיים ש-$p(x) = m\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_n)$, ולכן

$$\int_0^1 \log|p(x)| = \log m + \sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \log|x-\alpha_i|\,dx$$

ראשית, נשים לב שלכל $\alpha \in [0,1]$ מתקיים

$$\int_0^1 |x-\alpha|dx = \int_0^\alpha |x-\alpha|dx + \int_\alpha^1 |x-\alpha|dx = \int_0^\alpha \log x\,dx + \int_0^{1-\alpha} \log x\,dx$$
$$= \alpha\log\alpha - \alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha) - (1-\alpha) =$$
$$= \alpha\log\alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha) - 1.$$

בפרט, עבור $\alpha = 0,1$, האינטגרל הוא -1, ולכן אפשר להוריד -1 משני האגפים ולהניח שהפולינום לא מתאפס ב-$0,1$.

<u>למה:</u>

לכל $\alpha \neq 0,1$ מתקיים $\int_0^1 \log|x-\alpha|\,dx \geq \frac{\log|1-\alpha|+\log|\alpha|}{2} - 1$.

<u>הוכחה:</u>

נסמן $f(\alpha) \coloneqq \int_0^1 \log|x-\alpha|\,dx - \frac{\log|1-\alpha|+\log|\alpha|}{2} + 1$.

עבור $\alpha \in [0,1]$,

$$f(\alpha) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\log\alpha + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\log(1-\alpha).$$

מכיוון שסכום זה נותן את המקדם החיובי ללוג הגדול מבין $\log\alpha\,, \log(1-\alpha)$, ושלילי באותו גודל לקטן, מתקיים ש-$f(\alpha) \geq 0$.

עבור $|\alpha| = R$ עבור $R > 0$ גדול מתקיים

$$f(\alpha)=\int_0^1 \log|x-\alpha|\,dx-\frac{\log|1-\alpha|+\log|\alpha|}{2}+1$$
$$=\int_0^1 \log|\alpha|\,dx+O\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{\log|\alpha|+\log|\alpha|}{2}+O\left(\frac{1}{R}\right)+1=1+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

נשים לב ש-$f(\alpha)\xrightarrow{\alpha\to 0,1}\infty$, ולכן קיים ε עבורו $f(\alpha)>1$ לכל α במרחק קטן מ- ε מהנקודות 0 או 1. בגלל ש-$\log|z|$ היא פונקציה הרמונית עבור $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, הפונקציה f הרמונית בתחום $\mathbb{C}\setminus[0,1]$. נוכיח ש-$f(\alpha)>0$ באמצעות המשפט שפונקציה הרמונית בתחום מקבלת מינימום בשפת התחום. בתחום $B(0,R)\setminus\big([0,1]\cup B(0,\varepsilon)\cup B(1,\varepsilon)\big)$, כאשר $B(x,r)$ הוא כדור ברדיוס r סביב x. הוכחנו f הרמונית בתחום, וראינו שבשפה $f(\alpha)\geq 0$, ולכל $\alpha\in B(0,R)\setminus\big([0,1]\cup B(0,\varepsilon)\cup B(1,\varepsilon)\big)$. איחוד התחומים האלה עבור $R>0$ ו-$\varepsilon>0$ קטן מספיק הוא הוא $\mathbb{C}\setminus[0,1]$, ולכן לכל $\alpha\neq 0,1$ מתקיים $f(\alpha)\geq 0$.

■

חזרה להוכחת האי שוויון:

$$\log m+\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \log|x-\alpha_i|\,dx\geq \log m+\sum_{i=1}^{n}\frac{\log|1-\alpha_i|+\log|\alpha_i|}{2}-n$$
$$=\log\left|m\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right|+\log\left|m\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)\right|-n=\log|p(0)|+\log|p(1)|-n$$
$$\geq -n$$

מ.ש.ל.