תרגיל בזיווגים

זיווג בגרף הוא תת-גרף 1-רגולרי (כלומר קבוצת קשתות זרות). **זיווג מקסימאלי** הוא זיווג בגודל מקסימאלי. **זיווג מושלם** הוא זיווג המערב את כל הקודקודים. **זיווג מכסה** קבוצת קודקודים A אם הוא מערב את כל קודקודי A (ואולי גם קודקודים נוספים).

מסלול מתחלף על פני זיווג מסוים Z הוא מסלול שהקשתות שלו שייכות\לא שייכות ל-Z לחילופין. **מסלול משפר** זיווג מסוים Z הוא מסלול מתחלף על פני Z שמתחיל ונגמר בנקודות שונות שלא מעורבות ב-Z.

0. נתון גרף וזיווג בו. הוכיחו: אין מסלול משפר לזיווג ⇔ הזיווג הוא מקסימאלי.

1. משפט Hall: נתון גרף דו-צדדי $G(A,B)$, כאשר A,B הם הצדדים שלו.

(א) הוכיחו כי קיים זיווג המכסה את A אם ורק אם לכל $U \subseteq A$ מתקיים $|N(U)| \geq |U|$, כאשר $N(U)$ זו קבוצת השכנים של U.

(ב) אם מתקיים $|N(U)| \geq |U| - d$ מה הגודל של זיווג מקסימלי?

2. משפט Tutte: נתון גרף G. הוכיחו כי קיים זיווג מושלם אם ורק אם לכל $U \subseteq V(G)$ כמות רכיבי הקשירות של $G-U$ בגודל אי-זוגי אינה עולה על $|U|$.

הערה: גם למשפט תות יש גרסה עם $|U| - d$.

3. מטריצה דו-סטוכסטית היא מטריצה עם מרכיבים אי-שליליים, עבורה סכום המספרים בכל שורה ובכל עמודה שווה 1. הוכיחו כי היא בהכרחה צירוף קמור של מטריצות תמורה.

4. תהי X קבוצה סופית, X_k משפחת כל תתי הקבוצות שלה בגודל k. הוכיחו כי לכל k,m קיים זיווג בין X_k ל-X_m שהוא מכסה את אחת המשפחות, כך שבכל זוג קבוצה אחת מכילה קבוצה אחרת.

5. בטבלה N עמודות ו- M שורות ($M < N$). חלק מהמשבצות מסומנות בכוכביות, כך שבכל עמודה יש כוכבית אחת לפחות. הוכיחו, שיש כוכבית כזאת, שבשורה שלה יש יותר כוכביות מאשר בעמודה שלה. הוכיחו שיש אפילו לפחות שתי כוכביות כאלו.

6. טבלה ריבועית מלאה באחדות ואפסים, כך שבכל קבוצת צריחים מקסימאלית הלא מאימים זה על זה מופיע אחד. הוכיחו כי קיימים מספרים שלמים i, j עבורם $i + j \geq n+1$ וקיימים i שורות ו-j עמודות, כך שכל החיתוכים של i השורות עם j העמודות הם אחדים.

7. כיסוי קודקודים של גרף הוא קבוצת קודקודים כך שלכל קשת של הגרף לפחות אחד הקצוות שלה נמצא בכיסוי. בגרף דו-צדדי גודל הזיווג המקסימאלי שווה לגודל כיסוי קודקודים המינימאלי.

8. נתון גרף דו-צדדי, כל צד שלו בגודל $2n$. בהנחה שתנאי Hall מתקיים לכל קבוצה עד גודל n כולל, אך משני הצדדים, הוכיחו שיש זיווג מושלם.

9. יש גרף G עם n קודקודים. שניים משחקים במשחק הבא. בכל תור בוחרים שכן לא צבוע של מי שנבחר בתור הקודם, וצבעים אותו. בתחילת המשחק אף קודקוד אינו צבוע. במהלך הראשון השחקן הראשון בוחר קודקוד כלשהו. הוכיחו שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת, אם ורק אם יש זיווג מושלם ב-G.

10. במחנה אימונים של אולימפיאדת פיסיקה במדינה זרה משתתפים 42 תלמידים. כל אחד מהם ברוגז עם חצי עולם (כלומר עם 21 תלמידים בדיוק, רוגז הוא יחס הדדי). הוכיחו כי אפשר לשלוח את התלמידים לעשות מעבדה בזוגות, או שאפשר לשלוח אותם לפעילות חברתית בשתי קבוצות (כך שאף שני תלמידים באותה קבוצה או באותה קבוצה לא יריבו).

11. נתון גרף $2k$-רגולרי. הוכיחו שיש בו תת-גרף 2-רגולרי המכיל את כל הקדקדים.

12. בטבלה M שורות, N עמודות. "מהלך אופקי" זו תמורה של איברי הטבלה שבה כל איבר נשאר באותה שורה בה הוא כבר היה. באופן דומה מגדירים "מהלך אנכי".

מצא את K הקטן ביותר, כך שאפשר לבצע כל תמורה של איברי הטבלה ב-K מהלכים.

13. An alien race has three genders: male, female, and emale. A married triple consists of three persons, one from each gender, who all like each other. Any person is allowed to belong to at most one married triple. A special feature of this race is that feelings are always mutual — if x likes y, then y likes x.

The race is sending an expedition to colonize a planet. The expedition has *n* males, *n* females, and *n* emales. It is known that every expedition member likes at least k persons of each of the two other genders. The problem is to create as many married triples as possible to produce healthy offspring so the colony could grow and prosper.

a) Show that if n is even and $k = \frac{n}{2}$, then it might be impossible to create even one married triple.

b) Show that if $k \geq \frac{3}{4}n$, then it is always possible to create *n* disjoint married triples, thus marrying all of the expedition members.

14. בקבוצה סדורה חלקית גודל האנטי-שרשרת המקסימאלית שווה לגודל כיסוי שרשראות המינימאלי.

15. הוכיחו כי בכל גרף 3-רגולרי 2-קשיר קיים זיווג מושלם. (גרף הוא 2-קשיר, אם הורדת כל קשת מהגרף משאירה אותו קשיר.)

16. עמרי בוחר תמורה על 76 איברים, ואמוץ מנסה לנחש אותה. בכל מהלך אמוץ מציג לעמרי תמורה כלשהי על אותם 76 איברים לפי בחירתו, ועמרי מספר לו בדיוק איזה מספרים בתמורה שלו עומדים על המקומות הנכונים. כמה מהלכים אמוץ צריך על מנת לשחזר את התמורה של עמרי?

רמזים ושאלות חימום

I. שאלה מפגרת: N קבוצות, על N איברים. כל איחוד של K קבוצות מכיל לפחות K איברים. יש תמורה שמתאימה לכל קבוצה איבר שבה.

II. רגולרי דו-צדדי. לצד עם דרגה גבוהה יותר (הקטן יותר) יש זיווג מכסה.

III. בטבלה בעלת n שודות, ו-m עמודות רשומים מספרים אי-שליליים. הוכיחו כי:
א. אם לכל משבצת בה רשום מספר חיובי, סכום המספרים בשורה שלה שווה לסכום המספרים בעמודה שלה, אז הוכיחו כי $m=n$.
ב. לכל משבצת בה רשום מספר חיובי, סכום המספרים בשורה שלה גדול או שווה לסכום המספרים בעמודה שלה. הוכיחו כי $m\geq n$.

IV. קבוצה בגודל 400 מחולקת ב-2 דרכים לאיחוד זר של 20 קבוצות שגודלם 20 איברים: $\{A_i\}_{i=1}^{20}$ ו-$\{B_i\}_{i=1}^{20}$. הוכיחו כי קיימת תמורה של $\{B_i\}$ כך שלכל i מתקיים $A_i \cap B_i \neq \varnothing$.

V. G הוא גרף דו-צדדי, ו-0 הוא לא ע"ע של מטריצת השכנויות שלו. הוכיחו כי קיים זיווג מושלם ב-G.