פונקציות יוצרות – שאלות

1. a_n סדרה של מספרים טבעיים עולים, נתון שלכל מספר טבעי m קיימים מספרים טבעיים i,j,k יחידים (לאו דווקא שונים) כך ש: $m=a_i+2a_j+4a_k$. מצאו את a_{5777}.

2. בהינתן תמורה $(a_1,a_2,...,a_n)$ נקרא לה מתחלפת אם $a_{i+1}-a_i$ מחליפה סימן כל פעם.
נסמן A_n כמות התמורות המתחלפות שמתחילות בעלייה, מצאו נוסחת נסיגה על A_n.
הראו שהפונקציה היוצרת האקספונציאלית של כמות התמורות המתחלפות היא:

$$\sec(x)+\tan(x)$$

(תזכורת: $(\sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$)

3. ישנם $2n$ נורות כבויות, מבצעים תהליך באורך k (גדול מ-n ומאותה זוגיות) בו כל פעם מדליקים נורה כבויה או מכבים נורה דלוקה. נסמן ב-N את כמות התהליכים בהם בסוף n הנורות הראשונות דלוקות, וה-n האחרונות כבויות, נסמן ב-M את כמות התהליכים בהם בסוף n הנורות הראשונות דלוקות, ולא נגענו ב-n האחרונות, מצאו את היחס N/M.

4. נתונות שתי סדרות $a_1,a_2,...,a_n$ ו-$b_1,b_2,...,b_n$ אשר אינן פרמוטציה אחת של השנייה, בנוסף נתון ש:

$$a_1+a_2,\ a_1+a_3,...,a_{n-1}+a_n$$
$$b_1+b_2,\ b_1+b_3,...,b_{n-1}+b_n$$

(סכומים של כל הזוגות בכל סדרה) פרמוטציה אחד של השני, הוכיחו ש-n חזקה של שתיים.

5. הוכיחו שיש חלוקה יחידה (עד כדי החלפה) של המספרים הטבעיים לשתי קבוצות A,B כך שכמות הדרכים להציג את n כ-$a_1+a_2=n,\ a_1\neq a_2,\ a_1,a_2\in A$ שווה לכמות הדרכים להציג כ-$b_1+b_2=n,\ b_1\neq b_2,\ b_1,b_2\in B$.

6*. מצאו את מספר הדרכים לפרק את המצולע הקמור בעל r קודקודים ל-k חלקים באמצעות אלכסונים שלא נחתכים (מותר קודקוד משותף לשני אלכסונים).

בהצלחה!