קניבלים

הגדרה: *קבוצה סדורה חלקית* (קס"ח) זו קבוצה S עם יחס $\geq$ שמקיים:

א. רפלקסיביות: $a \leq a$.
ב. אנטי-סימטריות: $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$.
ג. טרנזיטיביות: $a \geq b, b \geq c \Rightarrow a \geq c$.

הגדרה: נתונה קס"ח $(S, \geq)$. שני איברים $a, b \in S$ נקראים *ניתנים להשוואה* אם $a \geq b$ או $b \geq a$. *שרשרת* זו קבוצת איברים כך שכל שניים ניתנים להשוואה. *אנטי-שרשרת* זו קבוצת איברים כך שאף שניים לא ניתנים להשוואה.

משפט (*Mirsky*): בקס"ח, אורך השרשרת המקסימלית שווה למספר האנטי-שרשראות המינימלי הדרוש לכיסוי של הקבוצה. מספר זה מכונה *הגובה של הקבוצה*.

1. משפט (*Dilworth*): בקס"ח, אורך האנטי-שרשרת המקסימלית שווה למספר השרשראות המינימלי הנדרש לכיסוי של הקבוצה. מספר זה מכונה *הרוחב של הקבוצה*.
2. משפט (*Hall*): יהיה G גרף דו-צדדי, עם צדדים U, V. נניח כי לכל תת-קבוצה X ⊆ U מתקיים $|N(X)| \geq |X|$, כאשר $N(X)$ זו קבוצת השכנים של קודקודים ב-X. אז קיימת התאמה חח"ע שמתאימה לכל קודקוד ב-U שכן שלו ב-V.
3. משפט (*Kőnig*): בגרף דו-צדדי, כמות הקשתות בשידוך מקסימלי שווה לכמות הקודקודים המינימלית הנדרשת כדי לכסות את הקשתות (כלומר לכל קשת יש קודקוד בכיסוי).
4. משפט (*Menger*): יהי G גרף לא מכוון ויהיו x, y שני קודקודים שונים לא שכנים ב-G. אז מספר הקודקודים המינימלי שיש להסיר מ-G כדי שלא יהיה מסלול בין x ל-y שווה למספר המקסימלי של מסלולים זרים בזוגות (כלומר בלי קודקודים משותפים) בין x ל-y.
5. משפט (*Birkhoff-Von Neumann*): הקמור של מטריצות תמורות (כלומר מטריצות שבכל שורה ובכל עמודה יש בדיוק 1 אחד וכל השאר 0) הוא מטריצות דו-סטוכסטיות (כלומר מטריצות שבהן סכום כל שורה וכל עמודה הוא 1).
6. משפט (זרימה בגרפים): ברשת זרימה, הזרם המקסימלי שווה לחתך המינימלי.

משפט: המשפטים הקודמים (1-6) שקולים.

הערה: משפטים אלה הם מקרים פרטיים של משפט הדואליות בתכנון לינארי.

משפט שפרנר: אנטי-שרשרת מקסימלית ב-$2^{[n]}$ היא בגודל $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$.

מסקנה: תהי P קס"ח עם $mn + 1$ איברים. אז קיימת שרשרת מגודל $m + 1$ או אנטי שרשרת מגודל $n + 1$.

Proof Ideas:

1. *Dilworth*. Induction – remove a pair of comparable maximal and minimal element, take an anti-chain and look at what's above it or below it.
2. *Dilworth → Konig*. Define $u \leq v \Leftrightarrow (u, v) \in E$. Take a maximal anti-chain, and now all the vertices not contained in it form a vertex cover. A matching is a covering by chains.
3. *Konig →Dilworth*. Take two copies of the poset as the graph. Define $u \leq v \Leftrightarrow (u, v) \in E$. Now an anti-chain can be constructed from a vertex-cover by taking elements that correspond to vertices not in the cover on either side, and a cover by chains can be formed from a matching by adding x, y to a chain if the corresponding edge exists.

4. *Dilworth → Hall*. Define $u \leq v \Leftrightarrow (u,v) \in E$. Show that a maximal anti-chain is of size $|V|$. Now take a cover by $|V|$ chains and finish.
5. *Hall → Konig*. Take a minimal vertex-cover $S \cup T$. By Hall we can match $S, V-T$ and $T, U-S$.
6. *Hall → Birkhoff-Von Neumann*. Induction on the number of nonzero entries – show that it is possible to subtract a permutation matrix to create more zero entries.
7. *Sperner* – Hall's theorem on $\binom{[n]}{k}, \binom{[n]}{k+1}$. Second proof: Choose a random permutation. What's the chance that the first elements are from A_i? $\sum \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1$. Equivalently, count maximal chains containing A_i.

תרגילים

1. (Iran 2006) יהי k שלם חיובי, ויהי S אוסף סופי של קטעים בישר. נניח כי בין כל $k+1$ קטעים, יש שניים שנחתכים. הוכיחו כי קיימת קבוצה של k נקודות בישר שנחתכת עם כל קטע ב-S.

2. (ארדש-סקרש) הוכיחו כי לכל סדרה באורך $ab+1$ יש תת-סדרה עולה באורך $a+1$ או תת-סדרה יורדת באורך $b+1$.

3. (Romanian TST 2006) יהיו m ו-n שלמים חיוביים, ותהי $S \in \{1,2,3,\dots,2^m n\}$ תת-קבוצה בגודל $(2^m-1)n+1$ איברים. הוכיחו כי S מכילה $m+1$ מספרים שונים $a_0, a_1, \dots, a_m$ כך ש-$a_{k-1}|a_k$ לכל $k = 1,2,\dots,m$.

4. (Slovak Competition 2004) נתונים 1001 מלבנים, שאורכי צלעותיהם שייכים לקבוצה $\{1,2,\dots,1000\}$. הוכיחו כי ניתן לבחור שלושה מלבנים מתוכם A, B, C כך שניתן לשים את A בתוך B ואת B בתוך C.

5. יהי G גרף פשוט, ויהי $\chi(G)$ מספר הצביעה שלו. נניח כי G נצבע בכמות כזו של צבעים. הוכיחו כי יש מסלול ב-G מאורך $\chi(G)$ כך שכל קודקודיו מצבעים שונים.

6. יהיו A ו-B נקודות סריג שונות ב-$\mathbb{R}^n$ עם קואורדינאטות שלמות ואי-שליליות. נאמר ש-$A > B$ אם בכל קואורדינאטה יש אי-שוויון חלש, והנקודות שונות.
   א. נניח כי S קבוצה אינסופית של נקודות סריג עם קואורדינטות אי-שליליות. הוכיחו כי קיימת בה תת-סדרה עולה אינסופית.
   ב*. נניח כי T קבוצה של נקודות סריג בתיבה $[0,t_1] \times [0,t_2] \times \dots \times [0,t_n]$ (כש-$t_1, t_2, \dots, t_n$ שלמים אי-שליליים קבועים). נתון שאף נקודה ב-T לא גדולה מאף נקודה אחרת. מה הערך המקסימלי של $|T|$?



7. יהיו $a_1, \dots, a_n$ מספרים ממשיים, כך ש-$\forall i,\ |a_i| \geq 1$. יהי I קטע באורך 1. מצאו את הכמות המרבית של וקטורים $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ עבורם $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i \in I$.

8. משפחת קבוצות $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ נקראת *חופשייה מאיחודים* אם לכל i, j, k שונים, $S_i \cup S_j \neq S_k$. הראו כי כל משפחה של n קבוצות מכילה תת-משפחה חופשייה מאיחודים בעלת לפחות $\sqrt{n}$ קבוצות.

9. (מחנה קיץ 2016) נתונה קבוצה A בגודל 27. מחפשים משפחה $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ של תתי-קבוצות של A כך שלכל שלישייה i, j, k של אינדקסים שונים בין 1 ל-n יתקיים: $A_k \not\subset A_i \cup A_j$. האם ייתכן כי
   א. $n > 27$?
   ב. $n > 100$?
   ג. $n > 10000$?