<u>תרגיל 9</u>

1. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות לכל $x,y\in\mathbb{R}$
$$f\left(f\left(y\right)\right)+f\left(x-y\right)=f\left(xf\left(y\right)-x\right)$$

תשובה. $f\left(x\right)=0$ לכל x.

פתרון. נציב $x=y=0$ ונקבל
$$f\left(f\left(0\right)\right)+f\left(0\right)=f\left(0\right)$$
$$f\left(f\left(0\right)\right)=0$$

נציב $x=0$, $y=f\left(0\right)$ ונקבל
$$f\left(0\right)+f\left(-f\left(0\right)\right)=f\left(0\right)$$
$$f\left(-f\left(0\right)\right)=0$$

נציב $x=f\left(0\right)$, $y=f\left(0\right)$ ונקבל
$$f\left(0\right)+f\left(0\right)=f\left(-f\left(0\right)\right)=0$$

לכן $f\left(0\right)=0$.

כעת נציב $y=0$ ונקבל $0+f\left(x\right)=f\left(-x\right)$, כלומר f זוגית.

נציב $y=x$ ונקבל
$$f\left(f\left(x\right)\right)+0=f\left(xf\left(x\right)-x\right)$$

נציב $y=-x$ ונקבל
$$f\left(f\left(x\right)\right)+f\left(2x\right)=f\left(xf\left(x\right)-x\right)$$

נחסיר את שתי המשוואות שקיבלנו ונראה כי
$$f\left(2x\right)=0$$

לכל x.

2. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימות לכל $m,n\in\mathbb{N}$
$$f\left(mf\left(n\right)\right)=n+f\left(2015\cdot m\right)$$

הערה. $\mathbb{N}$ היא קבוצת השלמים החיוביים.

תשובה. לא קיימת פונקציה כזאת.

פתרון. קל לראות שמדובר בפונקציה חח"ע, הרי עם $f\left(n_1\right)=f\left(n_2\right)$ נוכל להציב את n_1 ואת n_2 במקום n. באגף שמאל נקבל אותו דבר בכל פעם, לכן גם באגף ימין צריכים לקבל אותו דבר.

נציב כעת $f\left(k\right)$ במקום m ונקבל
$$f\left(f\left(k\right)f\left(n\right)\right)=n+f\left(2015\cdot f\left(k\right)\right)$$

צד שמאל סימטרי, לכן

$$k+f\left(2015\cdot f\left(n\right)\right)=n+f\left(2015\cdot f\left(k\right)\right)$$
$$f\left(2015\cdot f\left(n\right)\right)-n=f\left(2015\cdot f\left(k\right)\right)-k$$

לכן המספר $f\left(2015\cdot f\left(n\right)\right)-n=C$ לא תלוי ב-n.

כלומר לכל $N>C$, קיים s עבורו $f\left(2015s\right)=N$, פשוט אפשר לקחת $s=f\left(N-C\right)$. כלומר לכל $N>C$ תמונה הפוכה של N (שהיא יחידה כי פונקציה חח"ע) זה מספר שמתחלק ב-2015. לכן כל מספר שלא מתחלק ב-2015 מועתק למספר שקטן מ-C. לכן קיבלנו פונקציה חח"ע מקבוצה אינסופית לקבוצה של C מספרים, וזה לא יתכן.

3. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות לכל $x,y\in\mathbb{R}$
$$\left(x+y\right)\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)=\left(x-y\right)f\left(x+y\right)$$

תשובה. $f\left(x\right)=ax^2+bx$

פתרון. קל לראות $f\left(x\right)=x$ וגם $f\left(x\right)=x^2$ מתאימות, מכיוון ש-
$$\left(x+y\right)\left(x-y\right)=\left(x-y\right)\left(x+y\right)$$
$$\left(x+y\right)\left(x^2-y^2\right)=\left(x-y\right)\cdot\left(x+y\right)^2$$

לכן גם כל פונקציה מסוג $f\left(x\right)=ax^2+bx$ מתאימה, ואם יש פונקציה f שמקיימת את המשוואה, אז גם פונקציה $f\left(x\right)-ax^2-bx$ מקיימת את המשוואה. בצורה כזאת אפשר להעביר כל פונקציה לפונקציה שמקיימת $f\left(1\right)=f\left(-1\right)=0$.

אם נציב $y=-x$ נקבל
$$0=2x\cdot f\left(0\right)$$
זה נכון לכל x, ולכן $f\left(0\right)=0$.

כעת נציב במשוואה המקורית $y=1$ ונקבל
$$\left(x+1\right)\cdot f\left(x\right)=\left(x-1\right)f\left(x+1\right)$$
אם נציב $x=z+1,y=-1$ במשוואה המקורית נקבל
$$zf\left(z+1\right)=\left(z+2\right)f\left(z\right)$$
$$x\cdot f\left(x+1\right)=\left(x+2\right)f\left(x\right)$$

לכן
$$x\left(x+1\right)\cdot f\left(x\right)=x\left(x-1\right)f\left(x+1\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)f\left(x\right)$$
זה יכול להתקיים באחד משני מצבים: או ש-$f\left(x\right)=0$, או ש-
$$x\left(x+1\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)$$
$$x^2+x=x^2+x-2$$
אבל זה לא מתקיים אף פעם. לכן הוכחנו ש-$f\left(x\right)=0$ לכל x, בהנחה ש-$f\left(1\right)=f\left(-1\right)=0$. לכן כל הפתרונות הם מהצורה $f\left(x\right)=ax^2+bx$.

4. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות לכל $x,y\in\mathbb{R}$
$$(x-2)f(y)+f\left(y+2f(x)\right)=f\left(x+y\cdot f(x)\right)$$

תשובה. $f(x)=x-1$ לכל x, או $f(x)=0$ לכל x.

פתרון. נציב $x=0$
$$-2\cdot f(y)+f\left(y+2f(0)\right)=f\left(y\cdot f(0)\right)$$
אם $f(0)=0$ נקבל
$$-2\cdot f(y)+f(y)=f(0)$$
$$f(y)=0$$
לכל y.

אם $f(0)\neq 0$ נקבל
$$(x-2)f(0)+f\left(2f(x)\right)=f(x)$$
קל להסיק כי f חח"ע.
נציב $x=2$ ונקבל
$$f\left(y+2f(2)\right)=f\left(2+y\cdot f(2)\right)$$
מכיוון ש-f חח"ע
$$y+2f(2)=2+y\cdot f(2)$$
$$y-2=(y-2)\cdot f(2)$$
זה מתקיים לכל y, לכן
$$f(2)=1$$
בהינתן x ננסה למצוא y עבורו $y+2f(x)=x+y\cdot f(x)$. אז
$$2f(x)-x=y\cdot\left(f(x)-1\right)$$
כלומר, כל עוד $f(x)\neq 1$ (וזה בד"כ נכון כי f חח"ע), $y=\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}$. הצבה במשוואה מקורית תיתן
$$(x-2)f\left(\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}\right)=0$$
כלומר לכל x שונה מ-2 ומעוד ערך נוסף שבו $f(x)=1$, שזה בעצם אותו ערך כי $f(2)=1$, הערך $f\left(\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}\right)$ מתאפס. אבל f חח"ע, לכן $\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}=C$ ולא תלוי ב-x (פרט לאותם שני ערכים).
לכן $2f(x)-x=C\cdot\left(f(x)-1\right)$, לכן
$$(2-C)f(x)=x-C$$

כאשר $x\neq 2$. העצם, אם נציב $x=2$ אז נקבל זהות ברורה, לכן המשוואה נכונה לכל x.
בנוסף, ראינו ש-$f\left(C\right)\neq 0$, לכן $C\neq 2$, ולכן

$$f\left(x\right)=\frac{x-C}{2-C}$$

הזה ביטוי מפורש; נציב במשוואה מקורית ונבדוק עבור איזה C זה עובד:

$$\left(x-2\right)\cdot\frac{y-C}{2-C}+\frac{y+2\cdot\frac{x-C}{2-C}-C}{2-C}=\frac{x+y\cdot\frac{x-C}{2-C}-C}{2-C}$$

$$\left(x-2\right)\left(y-C\right)+y+2\cdot\frac{x-C}{2-C}-\cancel{C}=x+y\cdot\frac{x-C}{2-C}-\cancel{C}$$

$$\left(xy-\cancel{2}y-Cx+2C\right)+\left(\cancel{y}-x\right)+\left(2-y\right)\cdot\frac{x-C}{2-C}=0$$

$$xy-x-Cx-y+2C+\left(2-y\right)\cdot\frac{x-C}{2-C}=0$$

אפשר להמשיך לפתוח סוגריים אבל כבר רואים שמתקבל פולינום, שמורכב ממונומים xy,x,y עם מקדמים ומקדם חופשי. הפולינום חייב להתאפס לכל x ו-y, ולכן כל מקדם שלו צריך להתאפס. בפרט, צריך שהמקדם של xy יתאפס, וזה $1-\frac{1}{2-C}$. כלומר בהכרח $2-C=1$ כלומר $C=1$. במקרה זה צריך שיתקיים

$$xy-x-x-y+2+\left(2-y\right)\left(x-1\right)=0$$

$$xy-2x-y+2+\left(-xy+y+2x-2\right)=0$$

וזה מתקיים. ובכן, הפונקציה היחידה שעובדת היא $f\left(x\right)=x-1$.

5. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות לכל $x,y\in\mathbb{R}$

$$f\left(f\left(x+y\right)\right)=f\left(x+y\right)+f\left(x\right)f\left(y\right)-xy$$

תשובה. $f\left(x\right)=x$ לכל x.

פתרון. נסמן $f\left(0\right)=c$. נציב $y=0$. נקבל

$$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+f\left(x\right)\cdot c$$

במשוואה האחרונה נחליף x ב-$x+y$

$$f\left(f\left(x+y\right)\right)=\left(1+c\right)f\left(x+y\right)\quad\left(@\right)$$

לכן בעזרת השוואה מקורית

$$\left(1+c\right)f\left(x+y\right)=f\left(x+y\right)+f\left(x\right)f\left(y\right)-xy$$

$$\boxed{c\cdot f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)-xy}\quad\left(\#\right)$$

נציב בזה $x=c$, $y=-c$

$$c\cdot c=f\left(c\right)f\left(-c\right)+c^{2}$$

$$0 = f(c)\,f(-c)$$

לכן יש שתי אפשרויות: $f(c)=0$ או $f(-c)=0$.

אם $f(c)=0$, נפעיל f על שני האגפים ונקבל $f(f(c))=f(0)=c$, אבל לפי $(@)$ מקבלים $f(f(c))=(1+c)\cdot f(c)=0$, לכן $c=0$.

אם $f(-c)=0$, ונציב $y=-c$ במשוואה $(\#)$ ונקבל

$$c\cdot f(x-c)=cx$$

אם $c\neq 0$, נסמן $x-c=t$, ונקבל $f(t)=t+c$. זאת נוסחה מפורשת ל- f, ניתן להציב אותה במשוואה המקורית ולראות האם היא עובדת:

$$\cancel{(x+y+c)}+c=\cancel{(x+y+c)}+(x+c)(y+c)-xy$$

$$c-c^2=cx+cy$$

זה אמור להתקיים לכל x ו- y, וזה קורה רק כאשר $c=0$.

ובכן בכל מקרה $c=0$. משוואה $(\#)$ הופכת למשוואה

$$f(x)\,f(y)=xy$$

ומשוואה $(@)$ הופכת ל-

$$f(f(z))=f(z)$$

מכאן ניתן לסיים בשורה אחת:

$$1\cdot y=f(1)\,f(y)=f(1)\,f(f(y))=1\cdot f(y)$$

לכן $f(x)=x$ לכל x.

6. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות לכל $x,y\in\mathbb{R}$

$$f\left(y^2+2xf(y)+\left(f(x)\right)^2\right)=\left(y+f(x)\right)\left(x+f(y)\right)$$

תשובות. $f(x)=x$, $f(x)=-x$, $f(x)=\frac{1}{2}-x$.

פתרון. נתבונן בשורשים של f, כלומר ערכים z עבורם $f(z)=0$.

אם יש שני שורשים שונים $z_1\neq z_2$ נציב במשוואה המקורית זוגות $\{z_1,z_1\}$, $\{z_1,z_2\}$, $\{z_2,z_1\}$, $\{z_2,z_2\}$ ונקבל

$$f(z_1^2)=z_1^2 \quad , \quad f(z_1^2)=z_1z_2$$

$$f(z_2^2)=z_1z_2 \quad , \quad f(z_2^2)=z_2^2$$

מכאן $z_1^2=z_1z_2$ וגם $z_2^2=z_1z_2$. אחד מהשורשים, z_1 או z_2, שונה מ-0, לכן באחת המשוואות ניתן לצמצם בגורם המשותף, ונקבל $z_1=z_2$ בניגוד להנחה.

לכן יש שורש אחד לכל היותר.

ניקח $y=-f(x)$ נקבל $f\left(2x\cdot f\left(-f(x)\right)+2\left(f(x)\right)^2\right)=0$.

כלומר $z=2x\cdot f\left(-f(x)\right)+2\left(f(x)\right)^2$ הוא שורש (בין היתר זאת אומרת שלפחות שורש אחד קיים).

אם z הוא שורש, נציב במשוואה המקורית $x=z$, $y=0$ ונקבל $f\left(2z\cdot f(0)\right)=0$, כלומר $2z\cdot f(0)$ גם שורש.

הוכחנו קודם כי יש שורש אחד בלבד אבל גם z וגם $2z\cdot f(0)$ שורשים. לכן זה אותו מספר. לכן $z=0$ או $f(0)=\frac{1}{2}$. גם כל השורשים האחרים שמצאנו זהים, לכן

$$2x\cdot f\left(-f(x)\right)+2\left(f(x)\right)^2=z \quad (*) \quad \text{לכל } x.$$

ננסה להוכיח שפונקציה f חח"ע. אכן, נניח כי $f(x_1)=f(x_2)=v$, אבל $x_1\neq x_2$.

מספיק לבדוק מקרה של $v\neq 0$ כי עבור שורשים כבר הוכחנו יחידות. נקבל

$$2x_1\cdot f(-v)+2v^2=z=2x_2\cdot f(-v)+2v^2$$

זה אפשרי רק אם $f(-v)=0$, כלומר $f(x_1)=f(x_2)=-z$.

נציב במשוואה המקורית $x=z$, $y=x_1$ ונקבל $f\left(x_1^2-2z^2\right)=0$. במילים אחרות $x_1^2-2z^2=z$. באותו אופן $x_2^2-2z^2=z$, לכן $x_1^2=x_2^2$.

ובכן, לא לגמרי הוכחנו חח"ע אבל כמעט: אם $f(x_1)=f(x_2)$ אבל $x_1\neq x_2$, אז $x_{1,2}=\pm\sqrt{z+2z^2}$.

עקב סימטריה של אגף ימין במשוואה המקורית,

$$f\left(y^2+2x\cdot f(y)+\left(f(x)\right)^2\right)=f\left(x^2+2y\cdot f(x)+\left(f(y)\right)^2\right) \quad (**)$$

זה יתכן בשני מקרים: או ש-

$$y^2+2x\cdot f(y)+\left(f(x)\right)^2=x^2+2y\cdot f(x)+\left(f(y)\right)^2 \quad (***)$$

או ש-

$$y^2+2x\cdot f(y)+\left(f(x)\right)^2+x^2+2y\cdot f(x)+\left(f(y)\right)^2=0$$

$$\left(y+f(x)\right)^2+\left(x+f(y)\right)^2=0$$

אבל אז $x+f(y)=0=y+f(x)$, ולכן שני האגפים במשוואה $(**)$ שווים ל-

$$\left(x+f(y)\right)\left(y+f(x)\right)=0$$

ואז יש לפונקציה f שני שורשים שונים בניגוד למה שכבר הוכחנו. לכן האפשרות השנייה בעצם לא קיימת, והמשוואה $(***)$ מתקיימת לכל x,y. לכן

$$\left(y-f(x)\right)^2=\left(x-f(y)\right)^2$$

נציב $y=0$ ונקבל

$$\left(f\left(x\right)\right)^2=\left(x-f\left(0\right)\right)^2$$

כלומר $f\left(x\right)=\pm\left(x-f\left(0\right)\right)$.

מקודם גילינו ש-$z=0$ (כלומר $f\left(0\right)=0$) או $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. כעת נפריד למקרים:

(א) אם $z=0$, אז $f\left(x\right)=\pm x$. אם $f\left(x\right)=x$ לכל x, קל לראות שהמשוואה המקורית מתקיימת, וגם אם $f\left(x\right)=-x$ לכל x. נניח כעת שקיימים מספרים משני הסוגים, כלומר קיימים $x_1,x_2\neq 0$ כך ש-$f\left(x_1\right)=x_1$ אבל $f\left(x_2\right)=-x_2$. נציב זוגות x_1,x_2 ו-x_2,x_1 במקום x,y במשוואה המקורית ונקבל

$$\pm\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)=\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)=\pm\left(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\right)$$

אבל אז בהכרח $x_1+x_2=\pm\left(x_1-x_2\right)$, ואז x_1 או x_2 מתאפס. לכן במקרה זה יש רק שתי פונקציות.

(ב) נעבור למקרה $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$, אז $f\left(x\right)=\pm\left(x-\frac{1}{2}\right)$. אז

לא יתכן ש-$f\left(x\right)=x-\frac{1}{2}$, לכל x כי לדוגמה $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$.

אם $f\left(x\right)=\frac{1}{2}-x$ לכל x נקבל

$$\frac{1}{2}-\left(y^2+2x\left(\frac{1}{2}-y\right)+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)=\left(y+\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)\left(x+\left(\frac{1}{2}-y\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}-\left(y^2-2xy+\cancel{x}+\frac{1}{4}-\cancel{x}+x^2\right)=\left(y-x+\frac{1}{2}\right)\left(x-y+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\left(y^2-2xy+x^2\right)=\frac{1}{4}-\left(x-y\right)^2$$

וזה מתקיים, לכן זאת פונקציה אפשרית.

נשאר לבדוק האם ניתן לשלב את שתי האפשרויות, כלומר האם יתכן שקיים x עבורו $f\left(x\right)=x-\frac{1}{2}$. נזכר במשוואה שהוכחנו:

$$\left(y-f\left(x\right)\right)^2=\left(x-f\left(y\right)\right)^2$$

נציב $y=\frac{1}{2}$ ונקבל:

$$\left(\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2=\left(x\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2=\left(x\right)^2$$

$$\left(1-x\right)^2=x^2$$

$$1=2x$$

כלומר אם קיים x עבורו $f\left(x\right)=x-\frac{1}{2}$, אז רק $x=\frac{1}{2}$, אבל $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, כלומר גם שם הנוסחה $f\left(x\right)=\frac{1}{2}-x$ מתקיימת.