<u>תרגיל 8</u> - נשביך יונים

1. הראו כי לכל n טבעי קיים מספר N שאין ברישום העשרוני שלו ספרות $2,3,...,7$ כך ש- N מתחלק ב- n ובנוסף $n^4 \geq N$.

פתרון. תהא A_N קבוצת המספרים שלמים אי-שליליים שקטנים מ- N ומורכבים מספרות 0 ו-1 בלבד. אם ניקח מספר $a \in A_N$ וניקח מספר b שרישום בינארי שלו זהה לרישום העשרוני של a, אז קל לראות כי $b^4 \geq a$. אכן, $2^4 > 10$, ולכן גם $2^{4k} > 10^k$, ולכן לכל סדרה סופית של אפסים ואחדים $\{c_k\}$ נקבל $\left(\sum c_k 2^k\right)^4 \geq \sum c_k 2^{4k} \geq \sum c_k 10^k$.

לכן הרישום העשרוני של מספרים מ-0 עד n, כאשר מתייחסים למספרים כרישום בינארי, נותן לפחות $n+1$ איברים שונים ב- A_N. לפי שובך היונים, שניים מהם שווים מודולו n. לכן הפרש של שני איברי A_N מסוימים מתחלק ב- n. קל לראות שברישום העשרוני של ההפרש יש רק ספרות 0, 1, 8, 9.

2. 60 אנשים השתתפו במספר מסיבות. כל שניים מהם נפגשו במסיבה אחת בדיוק, ולא הייתה מסיבה שבה נפגשו כולם. הראו שאחת מהם השתתף ב-9 מסיבות לפחות.

פתרון. נניח כי כל אחד השתתף ב-8 מסיבות בלבד (או פחות). בפרט שני הייתה ה-8 מסיבות לכל היותר. היות והיא פגש את 59 האנשים האחרים, אז לא יתכן שהיא פגש רק 7 אנשים לכל היותר בכל מסיבה. לכן היא פגשה 8 אנשים במסיבה זאת.

יכול להיות שהעצם כולם היו במסיבה זאת, אבל אז הייתה בעצם רק מסיבה אחת בניגוד לנתון. לכן יש מישהו שלא היה באותה מסיבה ששם היו 9 אנשים כולל שני (נגיד שקוראים לו שוקי). שוקי חייב לפגוש את 9 האנשים האלה, אבל הוא פוגש אותם במסיבות נפרדות, כי הם כבר פגשו זה את זה. לכן שוקי חייב להשתתף ב-9 מסיבות לפחות.

3. על הלוח רשומים 69 מספרים שונים שלמים חיוביים שאינם גדולים מ-100. הראו שניתן למצוא 3 מספרים שרשומים על הלוח, שסכום שלהם גם רשום על הלוח.

פתרון. נניח כי $a_1 < a_2 < ... < a_k$ זהה כל המספרים שרשמים שאינם עולים על 34. קל לראות כי $k \geq 3$, מכיוון שרק 67 מספרים יכולים להיות גדולים מ-34.

נתבונן במספרים

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 \,,\, a_1 + a_2 + a_4 \,,\, \ldots \,,\, a_1 + a_2 + a_k, \\ &a_1 + a_3 + a_k \,,\, a_1 + a_4 + a_k \,,\, \ldots \,,\, a_1 + a_{k-1} + a_k, \\ &a_2 + a_{k-1} + a_k \,,\, a_3 + a_{k-1} + a_k \,,\, \ldots \,,\, a_{k-2} + a_{k-1} + a_k \end{aligned} \qquad (*)$$

המספרים רשומים בסדר עולה; בשורה ראשונה $k-2$ מספרים, בשנייה $k-3$ מספרים, ובשורה השלישית גם $k-3$ מספרים; סה"כ יש לכל היותר $3k-8$ מספרים ברשימה זאת. כל המספרים לא עולים על 100. לכן או שיש מספר שנבחר שמתלכד אם אחד מהמספרים, ואז יש בעצם נבחרו 4 מספרים המקיימים $a+b+c=d$, או ש-

$$3k-8 \leq 31$$

במקרה זה $k \leq 13$. כלומר מבין 69 המספרים שנבחרו, רק 13 מספרים יכולים להיות קטנים או שווים ל-35, ו-56 המספרים האחרים גדולים מ-35.

נתבונן כעת במספר $A=a_1+a_2$. אם $13<A<54$ אז מבין הזוגות

$$34,34+A$$
$$35,35+A$$
$$\dots$$
$$45,45+A$$
$$46,46+A$$
$$47,47+A$$

יש זוג ששני המספרים בזוג $u,v=u+A$ זה נבחרו, ואז יש 3 מספרים u,a_1,a_2 שכולם נבחרו וגם סכומם נבחר. גם אם $A\le 13$ ניתן למצוא 13 זוגות זרים מסוג זה. אבל אם A אכן, נתבונן בזוגות:

$$(33,33+A),(34,34+A),...,(33+A-1,33+2A-1),$$
$$(33+2A,33+3A),...,(33+3A-1,33+4A-1),$$
$$(33+4A,33+5A),...,(33+5A-1,33+6A-1),$$
$$...$$

בצורה כזאת נזווג מספרים בין 34 ל-100 עד שנעבור את 100, ונדלג על $A-1$ מספרים לקראת הסוף לכל היותר, כלומר נדלג על פחות מ-13 מספרים. כלומר נזווג לפחות 52, כלומר יהיו לנו מעל 26 זוגות, לכן יהיה זוג ששני המספרים שלו נבחרו.

ובכן, נשאר המקרה ש- $A\ge 54$. לכן $a_2>27$, לכן $a_3\ge 28$. לכן $a_1+a_2+a_3\ge 82$. כלומר כל הסכומים ברשימה $(*)$ גדולים מ-34. לכן אם לא מצליחים למצוא 4 מספרים מהסוג שצריך שנבחרו, אז מבין המספרים מ-35 עד 100 יש 65 מספרים, חלקם המספרים שנבחרו – יש בעצם $69-k$ כאלה, וחלקם מספרים ברשימה $(*)$ – יש $3k-8$ כאלה, ואז $65\ge 69-k+3k-8=61+2k$, כלומר $4\ge 2k$, ולכן $2\ge k\ge 3$ וזה לא יתכן.

4. נתון מספר חיובי שלם n, ונסמן $m=2n$. מגדירים מערכת של n משוואות על m נעלמים $x_1,x_2,...,x_m$: המשוואות הן $a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+...+a_{i,m}x_m=0$, לכל $1\le i\le n$, כאשר המקדמים $a_{i,j}$ הן 0 או 1 או -1 (לא חייבים להיות כולם אותו דבר). הוכיחו שלמערכת יש פתרון במספרים שלמים שהערכים המוחלטים שלהם לא עולים על m.

פתרון. נתבונן בקבוצה V של ווקטורים בעלי m קואורדינאטות, שכל קואורדינאטה של כל ווקטור היא לפחות $-n$ ולכל היותר n. בקבוצה זו יש $(m+1)^m$ ווקטורים.

לכל ווקטור v בקבוצה V, שקואורדינאטות שלו הן $x_1,x_2,...,x_m$ נגדיר ווקטור $f(v)$ בעל n קואורדינאטות, כאשר קואורדינאטה מספר i של הווקטור $f(v)$ היא $a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+...+a_{i,m}x_m$. קל לראות שזה לכל היותר mn בערך המוחלט, ולכן לווקטורים שמתקבלים יש לכל היותר $(2mn+1)^n=(m^2+1)^n$. הראיון הוא ש- f משביכה קבוצה של $(m+1)^m$ ווקטורים לקבוצה יותר קטנה של ווקטורים, לכן יש שני

ווקטורים שונים u,v בקבוצה V עבורם $f(u)=f(v)$, ואז $u-v$ הוא פתרון של מערכת משוואות.
כל הקואורדינאטות של $u-v$ הן בין m ל-$-m$, ולכן $u-v$ זה הווקטור שרצינו למצוא. נשאר לבדוק שהקבוצה השנייה של ווקטורים קטנה מהראשונה, כלומר

$$(m^2+1)^n < (m+1)^m$$

$$m^2+1 < (m+1)^2$$

וזה ברור.

5. פאון קמור שיש לו F פאות מכיל כדור שרדיוסו r ומוכל בכדור שרדיוסו R. הוכיחו כי $F > \frac{R}{R-r}$, ואם לכדורים יש מרכז משותף אז $F > \frac{2R}{R-r}$.
פתרון. כידוע, בקליפה כדורית שרדיוסה 1, כיפה כדורית שגובהה h תופסת שטח $2\pi h$. בקליפה כדורית שרדיוסה R השטח של כיפה שגובהה h הוא $2\pi Rh$.
לכל פאה של פאון, נתבונן בחצי מרחב שמוגדר על ידי מישור הפאה, של כל הנקודות שנמצאות בצד ללא הפאון. חצאי המרחב האלה מכסים את כל הנקודות שמחוץ לפאון. בפרט, הם מכסים לגמרי קליפה כדורית שרדיוסה R. על הקליפה חצאי מרחב מגדירים כיפות כדוריות. גובה של כל כיפה כזאת לפחות $2R-2r$, מכיוון שכדור שרדיוסו r נמצא בצד הלא-נכון של המישור (הרי הוא פנימי לפאון). לכן כל כיפה היא בעלת שטח לפחות $2\pi R(2R-2r)$, יחד הם מכסים את הכדור (חלק מהנקודות גם מכוסות פעמיים, כמו כל הנקודות בין המשכים של שתי פאות), ויש F כיפות. לכן

$$4\pi R^2 < F \cdot 2\pi R(2R-2r)$$

הרי שטח הקליפה הוא $4\pi R^2$. לאחר קיזוז נקבל

$$R < F \cdot (R-r)$$

לכן $F > \frac{R}{R-r}$.
אם לכדורים יש מרכז משותף, זה משפר את החסם על גובה הקיפה פי 2, ומקבלים את החסם $F > \frac{2R}{R-r}$.

6. בעיגול שרדיוסו 16 סומנו 650 נקודות. הוכיחו שניתן לסמן נקודה נוספת O באותו מישור כך שעבור 10 נקודות מסומנות המרחק ל-O הוא קטן מ-3 אבל גדול מ-2.
פתרון. סביב כל נקודה נצייר טבעת (תחום בין שני מעגלים עם מרכז בנקודה זאת) שהרדיוס הפנימי שלה 2 והרדיוס החיצוני שלה 3. שטח של כל טבעת הוא $\pi(3^2-2^2)=5\pi$. הטבעות מוכלות בעיגול שרדיוסו 19, כלומר שטחו $\pi \cdot 19^2 = 361\pi$. שטח כולל של 650 הטבעות שנוצרו מכל הנקודות המסומנות הוא $650 \cdot 5\pi = 3250\pi$. אם כל נקודה בעיגול הגדול מכוסה רק 9 פעמים או פחות על ידי הטבעות, אז השטח של כל הטבעות הוא לכל היותר $361\pi \cdot 9 = 3249$. אבל שטח הכולל של העיגולים הוא גדול מדי, ולכן יש נקודה שמכוסה 10 פעמים. המרחקים מנקודה זו ל-10 נקודות לפחות הם בין 2 ל-3.