תרגיל 8

1. הראו כי לכל n טבעי קיים מספר N שאין ברישום העשרוני שלו ספרות $2,3,...,7$ כך ש-N מתחלק ב-n ובנוסף $n^4 \geq N$.

2. 60 אנשים השתתפו במספר מסיבות (יותר מ-1, ובכל מסיבה היו יותר מאיש אחד). כל שניים מהם נפגשו במסיבה אחת בדיוק, ולא הייתה מסיבה שבה נפגשו כולם. הראו שאחת מהם השתתף ב-9 מסיבות לפחות.

3. על הלוח רשומים 69 מספרים שונים שלמים חיוביים שאינם גדולים מ-100. הראו שניתן למצוא 3 מספרים שרשומים על הלוח, שסכום שלהם גם רשום על הלוח.

4. נתון מספר חיובי שלם n, ונסמן $m = 2n$. מגדירים מערכת של n משוואות על m נעלמים $x_1, x_2, ..., x_m$: המשוואות הן $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + ... + a_{i,m}x_m = 0$, לכל $1 \leq i \leq n$, כאשר המקדמים $a_{i,j}$ הן 0 או 1 או -1 (לא חייבים להיות כולם אותו דבר). הוכיחו שלמערכת יש פתרון במספרים שלמים שהערכים המוחלטים שלהם לא עולים על m.

5. פאון קמור שיש לו F פאות מכיל כדור שרדיוסו r ומוכל בכדור שרדיוסו R. הוכיחו כי $F > \frac{R}{R-r}$, ואם לכדורים יש מרכז משותף אז $F > \frac{2R}{R-r}$.

6. בעיגול שרדיוסו 16 סומנו 650 נקודות. הוכיחו שניתן לסמן נקודה נוספת O באותו מישור כך שעבור 10 נקודות מסומנות המרחק ל-O הוא קטן מ-3 אבל גדול מ-2.