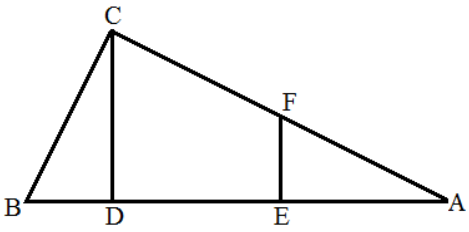
תרגיל 7

1. נתון טרפז ABCD, בו AD מקביל ל-BC. אלכסוניו נפגשים בנקודה X. המעגלים החוסמים של המשולשים ABX ו-CDX נפגשים שנית בנקודה Y. הוכיחו שאם Y נמצאת על AD, אז המשולש BYC שווה-שוקיים.

פתרון. $\sphericalangle YCB = \sphericalangle DYC = \sphericalangle DXC = \sphericalangle AXB = \sphericalangle AYB = \sphericalangle CBY$.

2. במשולש ישר זוויות ABC (בו הזווית C ישרה) הקטע CD הוא גובה (כאשר D על הצלע AB). נקודות E ו-F נמצאות על AB ו-AC בהתאמה, כך ש-$DC = ED$, והקטע EF מאונך ל-AB. מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle FBC$.



פתרון. המשולש CDE הוא ישר זווית ושווה-שוקיים. תהא G נקודה על CD, עבורה DEFG הוא מלבן. אז $CD = DE = FG$, וגם $\sphericalangle GCF = 90^\circ - \sphericalangle BCD = \sphericalangle DBC$. משולשים DBC, GCF הם ישרי זווית, והוכחנו שיש זווית שווה נוספת אז הם דומים, אבל גם הוכחנו ש-$CD = FG$ אז הם בעצם חופפים, ולכן $BC = CF$.
לכן המשולש BCF הוא ישר זווית ושווה-שוקיים, וזוויותיו שהן לא C שוות 45°. בפרט, $\sphericalangle FBC = 45^\circ$.

3. ABCD הוא ריבוע. על צלעותיו BC ו-CD נבחרו נקודות M ו-N בהתאמה, כך שהזווית MAN היא 45°. האלכסון BD חותך את הקטעים AM ו-AN בנקודות P ו-Q בהתאמה. הישרים MQ ו-NP נפגשים בנקודה X.
א. מצאו את הזווית בין הישרים AX ו-MN.
ב. מצאו את היחס בין אורכי הקטעים AX ו-MN.

פתרון. הזוויות MBQ ו-MAQ שוות (ל-45°), ולכן המרובע AQMB חסום. במרובע זה הזווית B ישרה, לכן באופן דומה גם הזווית Q ישרה. לכן MQ הוא הגובה במשולש MAN. באופן דומה גם NP הוא גובה במשולש MAN. הגבהים נפגשים בנקודה אחת, לכן AX הוא גם חלק מגובה לצלע MN, לכן AX מאונך ל-MN.

ננקה את הציור: נשאיר רק משולש MAN שזווית A שלו שווה ל-45°, ונקודת מפגש הגבהים שלו X. נבנה נקודה Y כך ש-AXMY מקבילית. צלעות MY ו-AY של המקבילית מקבילות לגבהים של המשולש MAN, לכן הן מאונכות לצלעותיו MN ו-AN בהתאמה. כלומר הזוויות YMN ו-YAN ישרות. כלומר מעגל שקוטרו NY חוסם את המשולש MAN. לכן הזווית MYN שווה לזווית MAN כלומר ל-45°.
לכן המשולש MYN ישר זווית ושווה-שוקיים, ולכן $MN = YN = AX$.

הערה. באופן דומה ניתן להוכיח, שבמשולש MAN שזווית A שלו שווה ל-α ו-X נקודת מפגש הגבהים שלו, $AX/MN = \cot\alpha$.

4. על הצלעות AB, BC, CD ו-DA של ריבוע ABCD נבחרו נקודות K, N, I ו-M בהתאמה כך שהזוויות $\sphericalangle AIM = \sphericalangle NAI = \sphericalangle ANK = 45^\circ$. הקטע KM פוגש את AN ואת AI בנקודות X ו-Y בהתאמה. הראו כי $S_{AXY} = S_{KNX} + S_{IMY}$.

פתרון. קל לראות שהישרים KN ו-AIY מקבילים. כמו כן, הישרים MI, AXN מקבילים.
משולשים AXY, NXK, IMY ומים, הרי צלעות מתאימות מקבילות. לכן מספיק לבדוק שסכום הריבועים של צלעות מתאימות בשני משולשים קטנים שווה לריבוע של צלע תואמת במשולש הגדול, כמו למשל $MY^2 + KX^2 = XY^2$.

משולשים KNB ו-IAD דומים (צלעות מתאימות מקבילות), ולכן $\frac{DI}{AD} = \frac{KB}{BN}$.

באופן דומה גם המשולשים DIM ו-BAN דומים, ולכן $\frac{DM}{DI} = \frac{BN}{AB}$.

נכפיל את שתי הזהויות האחרונות: $\frac{DI}{AD} = \frac{KB}{AB}$. אבל $AD = AB$ הרי אלה צלעות של אותו ריבוע, ולכן $DI = KB$. לכן גם $AM = AM - DM = AB - BK = AK$.

אם נקפל את המשולש AXK ו-AYM ביחס לישרים AX ו-BY בהתאמה, נקודות K ו-M יגיעו לאות הנקודה W. אכן, הזווית $\sphericalangle YAX$ היא 45°, שהיא שווה לסכום הזוויות $\sphericalangle MAY$ ו-$\sphericalangle KAX$, לכן הקטעים AK ו-AM יגיעו לאותו קו, אבל הם גם בעלי אותו אורך. במשולש WYX הזווית W מורכבת משתי זוויות של 45°, ולכן היא ישרה. כלומר, ניתן ליישם משפט פיתגורס עבור משולש WYX. זה בדיוק ייתן את הזהות שרצינו להוכיח.

5. נתונים שני מעגלים שרדיוסיהם r ו-R. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, שאחת מהן תסומן C. ישר משיק לשני המעגלים בנקודות A ו-B. מצאו את רדיוס המעגל החוסם של המשולש ABC (באמצעות r ו-R).

פתרון. יהיו α, β זוויות של משולש ABC (כרגיל בנקודות A,B בהתאמה), ו-a,b צלעות מול α, β בהתאמה. במעגל שרדיוסו r, זווית שנשענת על $AC = b$ היא α, כי היא שווה לזוויות בין משיק למיתר. לכן לפי משפט סינוסים במעגל זה

$$2R = \frac{b}{\sin\alpha}$$

ובאופן דומה, לפי משפט סינוסים במעגל האחר

$$2r = \frac{a}{\sin\beta}$$

מצד שני, אם נסמן ב-ρ את רדיוס המעגל החוסם של ABC, אז לפי משפט סינוסים

$$2\rho = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

נרשום ממוצע הנדסי של שתי הנוסחאות ונקבל

$$2\rho=\sqrt{\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\frac{b}{\sin\beta}}=\sqrt{\frac{a}{\sin\beta}\cdot\frac{b}{\sin\alpha}}=\sqrt{2r\cdot 2R}$$

מכאן התשובה $\rho=\sqrt{r\cdot R}$.

6. נתון מצולע בעל $2n+1$ צלעות. מחברים כל קודקוד שלו לאמצע הצלע הנגדית (כלומר בכל צד של הקו יש אותה כמות של צלעות). נניח ש-$2n$ מהקווים האלה נפגשים בנקודה אחת. הראו שבעצם כולם נפגשים בנקודה אחת.

פתרון. ניקח מצולע $A_1A_2A_3...A_{2n+1}$ (אנו גם נסמן $A_{2n}=A_1$ לנוחות הרישום). בכל צלע A_iA_{i+1} נבחר נקודה P_i. נחבר כל אחת מנקודות P_i לקודקוד הנגדי של המצולע (כלומר A_{i-n} או A_{i+n-1}).

משפט. אם כל הקווים שמחברים P_i לקודקוד הנגדי נפגשים בנקודה אחת, מתקיימת הזהות $\prod_{i=1}^{2n+1}\frac{A_iP_i}{P_iA_{i+1}}=1$.

הערה. עבור $n=1$ זה נקרא משפט צ'בה, ומתקיים גם משפט הפוך.

המשפט, ברגע שהוא נוסח, לא מאוד קשה להוכחה, ונשאיר אותו כרגע כתרגיל לקורא.

השאלה מתקבלת מהמשפט יחסית בקלות. אם כל התיכונים חוץ מאחד נפגשים בנקודה, נעביר ישר נוסף דרך הקודקוד שעוד נותר ונקודת מפגש המשותפת. הישר הזה יהיה גם תיכון, לפי המשפט: הרי אם המכפלה של הרבה אחדים ומספר נוסף זה 1, אז גם המספר הנוסף הוא 1.