<u>תרגיל 5</u>

1. עבור a ו-b חיוביים, הוכיחו כי $2\sqrt{a}+3\cdot\sqrt[3]{b}\geq 5\cdot\sqrt[5]{ab}$.

פתרון. לפי אי-שוויון הממוצעים,
$$\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}\geq 5\cdot\sqrt[5]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}}=5\cdot\sqrt[5]{ab}.$$

2. בהינתן $0\leq a,b,c,d\leq\sqrt{5}$, הוכיחו כי
$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-c)(d-b)\leq\sqrt{5}.$$

פתרון ראשון. ללא הגבלת הכלליות, $a\leq b\leq c\leq d$. אז המכפלה רק תגדל אם נהפוך את a ל-0 ואת d ל-$\sqrt{5}$. נקבל מכפלה
$$bc\sqrt{5}(c-b)\left(\sqrt{5}-c\right)\left(\sqrt{5}-b\right)\leq\sqrt{5}$$
$$bc(c-b)\left(\sqrt{5}-c\right)\left(\sqrt{5}-b\right)\leq 1$$
נחפש נקודה (b,c) בתחום $0\leq b\leq c\leq\sqrt{5}$ (שזה בעצם משולש). מקסימום מתקבל לא בקצוות (כי שם זה 0), לכן נגזרת חייבת להתאפס, גם לפי b וגם לפי c.
$$\frac{\partial}{\partial b}\left(b(b-c)\left(b-\sqrt{5}\right)\right)=0$$
$$(b-c)\left(b-\sqrt{5}\right)+b(b-c)+b\left(b-\sqrt{5}\right)=0$$
נחלק ב-$b(b-c)\left(b-\sqrt{5}\right)$ (זה מותר כי אם זה מתאפס, אי-השוויון ברור) ונקבל
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{b-\sqrt{5}}=0$$
באופן דומה, נגזרת לפי c תיתן
$$\frac{1}{c}+\frac{1}{c-b}+\frac{1}{c-\sqrt{5}}=0$$
נחבר ונקבל $\frac{1}{b}+\frac{1}{c-\sqrt{5}}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b-\sqrt{5}}=0$. לכן
$$\frac{b+c-\sqrt{5}}{b\left(c-\sqrt{5}\right)}+\frac{b+c-\sqrt{5}}{c\left(b-\sqrt{5}\right)}=0$$
יתכן ש-$b+c=\sqrt{5}$, ואז הזהות מתקיימת. אם לא, אפשר לקזז ולקבל
$$\frac{1}{b\left(c-\sqrt{5}\right)}+\frac{1}{c\left(b-\sqrt{5}\right)}=0$$
שני המחוברים שליליים, ולכן זה לא אפשרי. ובכן, האפשרות היחידה היא $b+c=\sqrt{5}$.

אז מתקיים בנוסף $\frac{1}{b}+\frac{1}{2b-\sqrt{5}}+\frac{1}{b-\sqrt{5}}=0$. כלומר

$$\left(b-\sqrt{5}\right)\left(2b-\sqrt{5}\right)+b\left(2b-\sqrt{5}\right)+b\left(b-\sqrt{5}\right)=0$$

$$5b^2-\sqrt{5}\left(3+1+1\right)b+5=0$$

$$b^2-\sqrt{5}b+1=0$$

$$b=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$$

אבל $b+c=\sqrt{5}$, לכן $b\le\frac{\sqrt{5}}{2}$, הרי $b\le c$. לכן המקרה היחיד שצריך לבדוק הוא $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ואז $c=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, ואז

$$\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(d-a\right)\left(c-b\right)\left(d-c\right)\left(d-b\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1\cdot\sqrt{5}\cdot1\cdot1=\sqrt{5}$$

ובכן, במקרה הגדול ביותר, מקבלים $\sqrt{5}$.

פתרון שני. כעת, כאשר אנו יודעים את התשובה, נוכל לנסח פתרון קצר יותר. כמו בפתרון הראשון, נוכל להניח כי $0=a<b<c<d=\sqrt{5}$, ומטרתנו היא להוכיח

$$b\cdot c\cdot\left(b-c\right)\left(\sqrt{5}-b\right)\left(\sqrt{5}-c\right)\le1$$

אנו רוצים למצוא פתרון קצר באמצעות AM-GM. אבל ב-AM-GM מתקיים שוויון כאשר כל המספרים שווים. לכן עלינו לגרום למספרים להיות שווים. אבל עכשיו זה קל, כי אנחנו יודעים מתי אמור להתקיים השוויון.

נסמן $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. אז קל לבדוק כי $\frac{1}{\varphi}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. אז נרשום

$$b\cdot c\cdot\left(c-b\right)\cdot\left(\sqrt{5}-b\right)\cdot\left(\sqrt{5}-c\right)=\varphi b\cdot\frac{c}{\varphi}\cdot\left(c-b\right)\cdot\frac{\sqrt{5}-b}{\varphi}\cdot\varphi\left(\sqrt{5}-c\right)$$

$$\le\left(\frac{\varphi b+\frac{c}{\varphi}+\left(c-b\right)+\frac{\sqrt{5}-b}{\varphi}+\varphi\left(\sqrt{5}-c\right)}{5}\right)^5=$$

$$=\left(\frac{b\left(\varphi-1-\frac{1}{\varphi}\right)+c\left(\frac{1}{\varphi}+1-\varphi\right)+\sqrt{5}\left(\varphi+\frac{1}{\varphi}\right)}{5}\right)^5=\left(\frac{b\cdot0+c\cdot0+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{5}\right)^5=1$$

3. הוכיחו כי $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\geq\frac{5}{16}\left(a+b+c+1\right)^2$.

גישה. ננסה לנחש את נקודות השוויון. קל לראות ש-$a=b=c=1$ לא עובד – אין מכנה של 16. ננסה $a=b=c=\frac{1}{2}$ וזה עובד!

פתרון. נסמן $a=\frac{x}{2}$, $b=\frac{y}{2}$, $c=\frac{z}{2}$. אז אי-השוויון הוא:

$$\left(\frac{x^2}{4}+1\right)\left(\frac{y^2}{4}+1\right)\left(\frac{z^2}{4}+1\right)\geq\frac{5}{16}\left(\frac{x+y+z}{2}+1\right)^2$$

$$\left(x^2+4\right)\left(y^2+4\right)\left(z^2+4\right)\geq5\left(x+y+z+2\right)^2$$

מבין המספרים x^2,y^2,z^2 יש שני מספרים שקטנים או שווים מ-1, או שני מספרים שגדולים או שווים ל-1 (לפי שובך היונים). לכן לה"כ $\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\geq0$. לאחר פתיחת סוגריים והעברת אגפים, נקבל $x^2y^2+1\geq x^2+y^2$. לכן

$$\left(x^2+4\right)\left(y^2+4\right)=x^2y^2+1+4\left(x^2+y^2\right)+15\geq5\left(x^2+y^2+3\right)$$

לכן מספיק להראות כי $\left(x^2+y^2+3\right)\left(z^2+4\right)\geq\left(x+y+z+2\right)^2$

זה מתקבל מיד מאי-שוויון קושי-שוורץ: עבור ווקטורים $\begin{pmatrix}x\\y\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}1\\1\\z\\1\\1\end{pmatrix}$.

4. מספרים חיוביים a,b,c ו-d מקיימים $a^n+b^n+c^n+d^n=4$, כאשר $n\geq1$ ממשי (לאו דווקא טבעי). הוכיחו כי $a^nb+b^nc+c^nd+d^na\leq4$.

פתרון. נסמן $x=a^n,\ y=b^n,\ z=c^n,\ t=d^n$. אז בהינתן $x+y+z+t=4$, צריך להוכיח כי $\sum_{cyc}x\cdot\sqrt[n]{y}\leq4$. באמצעות AM-GM מקבלים $\sqrt[n]{y}\leq\frac{y+n-1}{n}$. ולכן צריך להראות כי $\sum_{cyc}\left(xy+\left(n-1\right)x\right)\leq4n$, כלומר $\sum_{cyc}xy\leq4$. אבל

$$xy+yz+zt+tx=\left(x+z\right)\left(y+t\right)\leq\left(\frac{x+z+y+t}{2}\right)^2=4.$$

5. מספרים אי-שליליים a,b,c,d מקיימים $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. הוכיחו כי
$$a+b+c+d\ge 1+2\left(abc+abd+acd+bcd\right).$$

פתרון. אפשר לראות כי מתקיים שוויון כאשר $a=b=c=d=\frac{1}{2}$, וגם כאשר אחד המספרים שווה 1 והאחרים אפסים.
נזכיר אי-שוויון מקלורן:
$$\sqrt[4]{abcd}\le\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\le\sqrt{\frac{ab+ac+bc+ad+bd+cd}{6}}\le\frac{a+b+c+d}{4}$$
קל לראות גם כי $\frac{ab+ac+bc+ad+bd+cd}{6}\le\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$.
לכן
$$abc+abd+acd+bcd\le\frac{1}{3}\left(ab+ac+bc+ad+bd+cd\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$
כאשר במקרה שלנו $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=1$. לכן מספיק להראות כי
$$a+b+c+d\ge 1+\frac{2}{3}\left(ab+ac+bc+ad+bd+cd\right)$$
נסמן $a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{2}{3}k\left(ab+ac+bc+ad+bd+cd\right)$. קל לראות כי $k\ge 1$ ולכן צריך להוכיח כי
$$\sqrt{\left(a+b+c+d\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)}\ge$$
$$\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{2}{3}\left(ab+ac+bc+ad+bd+cd\right)$$
במילים אחרות $\sqrt{\left(\frac{2}{3}k+2\right)\cdot\frac{2}{3}k}\ge\frac{2}{3}k+\frac{2}{3}$, כלומר $\sqrt{(k+3)\cdot k}\ge k+1$, כלומר
$$k(k+3)\ge(k+1)^2$$
$$k\ge 1$$
אבל זה ברור.

6. מספרים חיוביים x ו- y מקיימים $x^2+y^2=2$. הוכיחו כי $x^{4y}+y^{4x}\le 2$.

פתרון. המספרים נמצאים בתחום $\left[0,\sqrt{2}\right]$. במקרה $x=y=1$ מתקיים שוויון. לכן ללא הגבלת הכלליות $0<y<1<x<\sqrt{2}$.
אם $y\le\frac{1}{2}$ אז $x^{4y}\le x^2$ וגם $y^{4x}\le y^2$, ולכן $x^{4y}+y^{4x}\le x^2+y^2=2$.
לכן מרגע זה ניתן להניח כי $\frac{1}{2}<y<1<x<\sqrt{2}$.
היות ו- $1<x\le\sqrt{2}$ קיים $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ המקיים $x=\cos\alpha+\sin\alpha$, ואז קל לראות שגם $y=\cos\alpha-\sin\alpha$. אי-השוויון מקבל צורה

$$\left(1+\sin 2\alpha\right)^{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}-1\le 1-\left(1-\sin 2\alpha\right)^{2(\cos\alpha+\sin\alpha)}$$

נסמן $\sin(2\alpha)=t$, $2(\cos\alpha-\sin\alpha)=p$. אז $1<p<2$ ולכן

$$\left(1+\sin 2\alpha\right)^{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\left(1+t\right)^{p}<1+pt+\frac{p(p-1)}{2}t^2$$

אכן, נתבונן בפונקציה $f(t)=(1+t)^p-\left(1+pt+\frac{p(p-1)}{2}t^2\right)$. קל לראות כי $f(0)=f'(0)=0$, ובנוסף $f''(t)=p(p-1)\left((1+t)^{p-2}-1\right)<0$, מכיוון ש-$p-2<0$. לכן פונקציה קעורה, יש לה משיק אופקי ב-0, ולכן היא שלילית.

נסמן $2(\cos\alpha+\sin\alpha)=q$ אז קל לראות ש-$2<q<3$. אז

$$\left(1-t\right)^{q}=1-qt+\frac{q(q-1)}{2}t^2$$

אכן, נתבונן בפונקציה $g(t)=(1-t)^q-\left(1-qt+\frac{q(q-1)}{2}t^2\right)$. קל לראות כי $g(0)=g'(0)=0$, ובנוסף $f''(t)=q(q-1)\left((1-t)^{q-2}-1\right)<0$, מכיוון ש-$q-2>0$ ו-$1-t<1$. לכן פונקציה קעורה, יש לה משיק אופקי ב-0, ולכן היא שלילית.

$$1-\left(1-\sin 2\alpha\right)^{2(\cos\alpha+\sin\alpha)}=1-\left(1-t\right)^{q}>qt-\frac{q(q-1)}{2}t^2$$

נשאר להראות כי $pt+\frac{p(p-1)}{2}t^2\le qt-\frac{q(q-1)}{2}t^2$

אם נזכר בהגדרות, נראה שאי-השוויון הוא

$$2(\cos\alpha-\sin\alpha)+(\cos\alpha-\sin\alpha)\left(2(\cos\alpha-\sin\alpha)-1\right)\sin(2\alpha)$$
$$\le 2(\cos\alpha+\sin\alpha)-(\cos\alpha+\sin\alpha)\left(2(\cos\alpha+\sin\alpha)-1\right)\sin(2\alpha)$$

לאחר פתיחת סוגריים וקיזוז מקבלים $0\le(\cos\alpha-1)^2$.