תרגיל 4

גישה שעוזרת בהרבה מהשאלות הבאות היא התאמה: כלומר מוכיחים ששתי הקבוצות באותו גודל לא בזה שמחשבים את הגודל של כל אחת מבין שתי הקבוצות, אלה בזה שבונים פונקציה חד-חד ערכית ועל מקבוצה אחת לשנייה.

1. לכל מספר טבעי מ-1 עד 999999 כולל ניתן למצוא את הריבוע השלם הקרוב ביותר. אם הריבוע הזה הוא זוגי, המספר נקרא שחור, ואם הוא אי-זוגי, המספר נקרא לבן. מה יש יותר: מספרים שחורים או לבנים?

תשובה. יש יותר לבנים (ב-1).
פתרון. כל קטע בין n^2 ל-$(n+1)^2$, לא כולל הקצוות, מחולק בצורה שווה בין מספרים שחורים ללבנים. נשאר להשוות האם יש יותר שחורים או לבנים בין הריבועים עצמם. מ-1^2 עד 1000^2 יש אותו מספר של ריבועים זוגיים (שהם שחורים) לבין אי-זוגיים (שהם לבנים), כי 1000 זוגי. אבל במקרה שלנו, 1000^2 לא נחשב לכן יש שחור אחד פחות.

2. הוכיחו כי לכל מספר טבעי N יש אותה כמות דרכים להציג את N בתור סכום של מספרים שונים, ובתור סכום של מספרים אי-זוגיים (אין חשיבות לסדר המחוברים). למשל: את 5 ניתן להציג כסכום מספרים אי-זוגיים ב-2 דרכים: $1+1+1+1+1$ או $1+1+3$, וגם בתור סכום של מחוברים שונים ב-2 דרכים: $2+3$ או $1+4$.

פתרון. כל מספר טבעי ניתן להציג בדרך יחידה בתור מכפלה של גורם אי-זוגי וגורם שהוא חזקה של 2. אם יש לנו פירוק של N לסכום של מספרים טבעיים שונים, נציג כל מחובר בצורה כזאת, ונחבר יחד את כל המחוברים שהגורם האי-זוגי שלהם זהה. נקבל סכום, שבו בכל מחובר יש גורם אי-זוגי משותף כפול סכום של חזקות 2 שונות. אבל סכום של חזקות 2 שונות יכול לתת כל מספר טבעי. לכן הסכום הוא של מספרים אי-זוגי כפול מספר טבעי $(2a_i+1)\cdot b_i$, כאשר המספרים האי-זוגיים שונים זה מזה. נחליף את הביטוי $(2a_i+1)\cdot b_i$ בביטוי $(2a_i+1)+\ldots+(2a_i+1)$ כאשר המחובר $(2a_i+1)$ מופיע b_i פעמים, ונקבל סכום של מספרים אי-זוגיים ששווה לאותו דבר.
מצד שני, אם יש סכום של מספרים אי-זוגיים, אפשר לחבר יחד את כל המחוברים $(2a_i+1)$ מאותה צורה, ולקבל סכום של $(2a_i+1)\cdot b_i$, ואז את b_i אפשר לפרק באופן יחיד לסכום של חזקות 2 שונות.
זה נותן התאמה בין הדרכים לפרק את N לסכום של מחוברים אי-זוגיים לבין הדרכים לפרק את N לסכום של מחוברים שונים.

הערה. ניתן גם לפתור את השאלה בפונקציות יוצרות, ואז בעצם מגיעים לזהות:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\ldots=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^7}\cdot\ldots$$

שלא קשה להוכיח.

3. ריבוע 10×10 חולק על ידי מספר קטעים לריבועים שגם הצלעות שלהם שלמות. הוכיחו כי סכום האורכים של הקטעים האלה מתחלק ב-4.

פתרון. נחבר את כל האורכים של כל הצלעות של כל הריבועים בחלוקה. זה מספר שמתחלק ב-4, הרי כל הצלעות שלמות, ולכל ריבוע 4 צלעות זהות.
מצד שני, את המספר שמתקבל אפשר לחשב גם בדרך אחרת: אפשר להגיד שחיברנו את הצלעות של הריבוע הגדול (שזה 40) והוספנו את כל הקטעים הפנימיים פעמיים, הרי ספרנו אותו בשתי דרכים.
לכן 40 פלוס פעמיים סכום אורכי הקטעים הפנימיים מתחלק ב-4. לכן פעמיים סכום אורכי הקטעים הפנימיים מתחלק ב-4, והסכום עצמו זוגי, מש"ל.

4. נניח כי p ו-q הם מספרים זרים. הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{\left\lfloor\frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor}$ שווה ל-0 או 1.

(כאן $\lfloor x\rfloor$ מסמן את החלק השלם של x.)

פתרון. נחשוב על שתי אפשרויות כאשר pq זוגי או אי-זוגי.
מקרה זוגי: אנו נוכיח שכאשר $k+\ell=pq-1$, אז $\left\lfloor\frac{\ell}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\ell}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor$ הוא מספר אי-זוגי, ולכן $(-1)^{\left\lfloor\frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor}$ ו-$(-1)^{\left\lfloor\frac{\ell}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\ell}{q}\right\rfloor}$ מתקזזים בזוגות, ולכן כל הסכום מתאפס, הרי הכלל $k+\ell=pq-1$ מחלק את כל המספרים מ-0 עד $pq-1$ לזוגות.
אכן, אם נחלק אם שארית
$$k=k_1p+\kappa_1\ ,\ \ell=\ell_1p+\lambda_1\ ,\ k=k_2q+\kappa_2\ ,\ \ell=\ell_2q+\lambda_2$$
כאשר $0\le\kappa_1,\lambda_1<p$, וכן $0\le\kappa_2,\lambda_2<q$.
אז קל לראות כי $\kappa_1+\lambda_1=p-1$, וכן $\kappa_2+\lambda_2=q-1$,
לכן $pq-1=k+\ell=p(k_1+\ell_1)+p-1$, כלומר $p(q-1)=p(k_1+\ell_1)$, במילים אחרות $q-1=k_1+\ell_1$. באופן דומה רואים כי $p-1=k_2+\ell_2$.
אנחנו מדברים על מקרה שבו pq זוגי, אבל p ו-q זרים, לכן אחד מהם זוגי והאחר אי-זוגי, לכן $p+q$ אי-זוגי, לכן גם $k_1+\ell_1+k_2+\ell_2=p+q-2$ אי-זוגי, וזה בעצם מה שרצינו להוכיח.

מקרה אי-זוגי: כמו קודם, לכל k נחלק אם שארית: $k=k_1p+\kappa_1\ ,\ k=k_2q+\kappa_2$ כאשר $0\le\kappa_1<p$, וכן $0\le\kappa_2<q$. עקב משפט שעריות הסיני, יש התאמה בין $\{0,1,2,3,...,pq-1\}$ שהיא קבוצה של כל האפשרויות ל-k לבין קבוצה של כל האפשרויות לזוגות שאריות κ_1,κ_2, שהיא $\{0,1,2,...,p-1\}\times\{0,1,2,...,q-1\}$. לכן
$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{\left\lfloor\frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor}=\sum_{\kappa_1=0}^{p-1}\sum_{\kappa_2=0}^{q-1}(-1)^{\kappa_1+\kappa_2}=\sum_{\kappa_1=0}^{p-1}(-1)^{\kappa_1}\sum_{\kappa_2=0}^{q-1}(-1)^{\kappa_2}=1\cdot1=1.$$

5. מחרוזת מעגלית מורכבת מ-2013 חרוזים, כאשר כל חרוז יכול להיות לבן או ירוק. מחרוזת נקראת מגניבה, אם מכל 21 חרוזים עוקבים יש לפחות חרוז ירוק. מחרוזות שיש להן צבע שונה בחרוז מסוים, אבל אפשר להופך אחת לשנייה באמצעות סיבוב או שיקוף, נחשבות שונות. הוכיחו שהמספר הכולל של מחרוזות מגניבות הוא בהכרח אי-זוגי.

פתרון. קיימת מחרוזת מגניבה אחת שכל החרוזים שלה באותו צבע (ירוק). ננסה להבין את זוגיות של כמות המחרוזות שבהם מופיעים שני הצבעים.
לכל מחרוזת מגניבה, נתאים **מחרוזת תקנית** שבה במקום ה-0 נמצא חרוז לבן, ובמקום ה-1 נמצא חרוז ירוק. אם המחרוזת המגניבה מקיימת את התנאי, היא מתאימה לעצמה, אם במקומות 0 ו-1 יש חרוזים לבנים, נסובב אותה - שחרוז 1 יעבור למקום של חרוז 0 – עד שחרוז 1 יהפוך לירוק; אם חרוז 0 בהתחלה ירוק, נסובב את המחרוזת בכיוון ההפוך עד שהחרוז במקום ה-0 יהפוך להיות לבן. הרווח בין החרוז הלבן במקום 0 לחרוז הירוק במקום 1 יקרא **רווח מודגש**, הרצף של חרוזים לבנים לפני רווח המודגש ושל חרוזים ירוקים אחרי הרווח המודגש יקרא **רצף מודגש**.
לכל מחרוזת תקנית מתאימות מספר מחרוזות מגניבות, ומספר זה שווה לאורך הרצף התקני שלה. לכן אפשר להתעלם ממחרוזות התקניות שאורך הרצף המודגש שלהם הוא באורך זוגי. לכן מספיק לספור מחרוזות תקניות שהרצף המודגש שלהם אי-זוגי, ומבחינת זוגיות צריך לספור כל מחרוזת תקנית כזאת פעם אחד בדיוק.
אנחנו נבנה זיווג על מחרוזות מגניבות תקניות שיש להן רצף מודגש באורך אי-זוגי, ובכך נוכיח שכמות שלהן זוגית. הזיווג פשוט: בתוך הרצף המודגש, מחליפים חרוז אחד שנמצא ליד הרווח המודגש, כך שכמות החרוזים יגדל בצבע שיש לו מספר אי-זוגי של חרוזים ברצף המודגש. יחד עם זאת, מסובבים את המחרוזת במקום אחד כך ששוב נקבל מחרוזת תקנית.
ובכן, חוץ ממחרוזת אחת שכולה באותו צבע, יש מספר זוגי של מחרוזות מגניבות, לכן יש מספר אי-זוגי של מחרוזות מגניבות.

6. נתבונן בסדרה של פולינומים: $P_0(x)=1$, $P_1(x)=0$, וכל הפולינומים הבאים מוגדרים באמצעות סדרת נסיגה: $P_{n+1}(x)=nx\cdot P_{n-1}(x)+P_n'(x)$. עבור אילו מספרים ראשוניים q יש לפולינום $P_q(x)$ מקדם שלא מתחלק ב-q?

תשובה. רק עבור 2 ו-3.
פתרון. ננסה לחשוב על כמות הדרכים לחלק קבוצה של n אנשים לזוגות ושלישיות. כמות הדרכים לחלק את הקבוצה של n אנשים ל זוגות ושלישיות, כך שיש בדיוק k זוגות, תסומן $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$. נרשום פולינום $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k$. פולינום זה מכיל מידע על כמות החלוקות שאנחנו מחפשים, ואפילו מפריד את החלוקות מסוג שונה למקדמים של דרגות שונות. ברור כי $P_0(x)=1$ הרי יש חלוקה אחת בלבד של קבוצה ריקה, ובחלוקה זאת יש 0 זוגות ו-0 שלשות. גם $P_1(x)=0$, כי קבוצה בגודל 1 אי-אפשר לחלק לא לזוגות ולא לשלשות בשום צורה.

כעת, נניח שחישבנו את כל הפולינומים שהגדרנו עד P_n כולל, ורוצים לחשב את הפולינום הנוסף P_{n+1}. כלומר אנחנו חושבים על חלוקה של $\{1,2,...,n,n+1\}$ לזוגות ולשלשות. האיש $n+1$ יכול להשתייך לזוג או לשלישייה. אם נוריד אותו, יכול לקרות אחד משני הדברים:

א. אם $n+1$ השתייך בשלישיה, השלישייה תהפוך לזוג.

ב. אם $n+1$ השתייך לזוג, ונוריד אותו, יהיה מישהו שלא שייך לזוג ולא לשלישייה.

נספור בנפרד את הכמויות בשני המצבים, על מנת לחשב את $\left\langle \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\rangle$.

במצב א' מקבלים בעצם חלוקה של n לזוגות ושלישיות, כאשר יש $k+1$ זוגות: k זוגות שהיו לפני שהורדנו את האיש $n+1$, וזוג מיוחד שנוצר. לכן כמות האפשרויות למצב א' הוא $\left\langle \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle \cdot (k+1)$, כי צריך לחלק את n אנשים לזוגות ושלשות כך שיהיו $k+1$ זוגות, ולבחור את הזוג המיוחד. אם נרשום את המקדמים הרלוונטיים בפולינום, נקבל שזה בדיוק P_n'.

במצב ב' יש לאיש $n+1$ איש נוסף באותו זוג איתו, שאפשר לבחור ב-n דרכים. את $n-1$ האנשים האחרים צריך לחלק לזוגות ושלשות כך שיהיו $k-1$ זוגות, וזה נותן $n\cdot\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle$ אפשרויות. אם נרשום את הכול כפולינום, נקבל פולינום $nx\cdot P_{n-1}(x)$.

בסופו של דבר מקבלים נוסחת נסיגה $\left\langle \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle \cdot (k+1) + n\cdot \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$, או ברישום הפולינומי $P_{n+1}(x) = nx\cdot P_{n-1}(x) + P_n'(x)$, וזה בדיוק כמו הנוסחה מניסוח השאלה. לכן הפולינומים שהוגדרו בשאלה הם אותם הפולינומים שסופרים חלוקות לזוגות ושלשות.

כאשר n הוא מספר ראשוני q, בד"כ קל לראות שכמות החלוקות מתחלקת ב-q. אכן, אם נסדר את כל האנשים בקודקודים של מצולע משוכלל בעל q קודקודים, אז סיבובים של המצולע יעבירו כל חלוקה תקנית עם k זוגות לחלוקה תקנית אחרת. אם זו אותה חלוקה, אז או שכמות הזוגות מתחלקת ב-q, או שכמות השלשות מתחלקת ב-q, או ש-q עצמו מתחלק ב-2 או 3. לכן לכל ראשוני שגדול מ-3, כמות החלוקות מכל סוג מתחלקת ב-q, לכן כל מקדמי הפולינום P_q מתחלקים ב-q.

עבור המקרים של 2 ו-3 קל לראות שהפולינומים לא מתחלקים ב-q, וזה קשור לכך שיש חלוקה אחת בלבד (זוג אחד או שלישיה אחת).