תרגיל 4

1. לכל מספר טבעי מ-1 עד 999999 כולל ניתן למצוא את הריבוע השלם הקרוב ביותר. אם הריבוע הזה הוא זוגי, המספר נקרא שחור, ואם הוא אי-זוגי, המספר נקרא לבן. מה יש יותר: מספרים שחורים או לבנים?

2. הוכיחו כי לכל מספר טבעי N יש אותה כמות דרכים להציג את N בתור סכום של מספרים שונים, ובתור סכום של מספרים אי-זוגיים (אין חשיבות לסדר המחוברים). למשל: את 5 ניתן להציג כסכום מספרים אי-זוגיים ב-2 דרכים: $1+1+1+1+1$ או $1+1+3$, וגם בתור סכום של מחוברים שונים ב-2 דרכים: $2+3$ או $1+4$.

3. ריבוע 10×10 חולק על ידי מספר קטעים לריבועים שגם הצלעות שלהם שלמות. הוכיחו כי סכום האורכים של הקטעים האלה מתחלק ב-4.

4. נניח כי p ו- q הם מספרים זרים. הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor}$ שווה ל-0 או 1.

(כאן $\lfloor x \rfloor$ מסמן את החלק השלם של x.)

5. מחרוזת מעגלית מורכבת מ-2013 חרוזים, כאשר כל חרוז יכול להיות לבן או ירוק. מחרוזת נקראת מגניבה, אם מכל 21 חרוזים עוקבים יש לפחות חרוז ירוק. מחרוזות שיש להן צבע שונה בחרוז מסוים, אבל אפשר להופך אחת לשנייה באמצעות סיבוב או שיקוף, נחשבות שונות. הוכיחו שהמספר הכולל של מחרוזות מגניבות הוא בהכרח אי-זוגי.

6. נתבונן בסדרה של פולינומים: $P_0(x)=1$, $P_1(x)=0$, וכל הפולינומים הבאים מוגדרים באמצעות סדרת נסיגה: $P_{n+1}(x)=nx\cdot P_{n-1}(x)+P_n'(x)$. עבור אילו מספרים ראשוניים q יש לפולינום $P_q(x)$ מקדם שלא מתחלק ב- q?