תרגיל 3

1. נתון משולש ABC שאינו שווה שוקיים. נקודות Z ו-X נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה, ומקיימות CX = AZ. נקודה E היא אמצע הקשת של המעגל החוסם, שמכילה את B וקצותיה הן A ו-C. הוכיחו כי הנקודות B, E, X, Z נמצאות על מעגל אחד, וכי EZ = EX.

פתרון. $\measuredangle EAB = \measuredangle ECB$, מכיוון שהן נשענות על אותה קשת. $EC = EA$. לכן קיים סיבוב סביב E שיעביר את A ל-C, וסיבוב זה יעביר גם את הישר AB לישר CB, ולכן גם את Z ל-X. לכן $EZ = EX$.

הערה. אפשר לנסח את אותו הפתרון לא עם סיבוב, אלה באמצעות חפיפת משולשים EAZ ו-ECX.

2. נתון משולש ABC, שחסום בו מעגל שמרכזו I. נקודות Z ו-X נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה. הוכיחו כי X, Z, I ו-B נמצאות על מעגל אחד אם ורק אם $AZ + CX = AC$.

פתרון. נסמן ב-U, V ו-W את נקודות ההשקה של המעגל החסום עם הצלעות BC, AC ו-AB בהתאמה.
המרובע XIZB חסום אך ורק כאשר $\measuredangle BXI = \measuredangle CZA$. נתבונן בסיבוב סביב נקודה I שמעביר את U ל-W. סיבוב זה גם יעביר את הצלע BC לצלע AB, ואם התנאי על הזוויות מתקיים גם את X ל-Z. לכן $UX = WZ$, ואם הקטע UX מכוון כלפי B, אז WZ מכוון כלפי A, ולהפך: אם UX מכוון כלפי C אז WZ מכוון כלפי B. לכן

$$AZ + CX = AW + CU = AV + CV = AC$$

אך ורק כאשר המרובע XIZB חסום.

3. הריבועים ABCD, KLMN מכוונים שניהם נגד כיוון השעון (לאו דווקא מקבילים). הישרים AK ו-BL נפגשים בנקודה P, הישרים BL ו-CM בנקודה Q, הישרים CM ו-DN בנקודה R, והישרים DN ו-KA בנקודה T. הוכיחו ש-8 המעגלים החוסמים של PAB, PKL, QBC, QLM, RCD, RMN, TDA, TNK נפגשים בנקודה אחת.

פתרון. נזכיר שהעתקה ספירלית (או העתקת דמיון) זה שילוב של סיבוב והומותטיה עם אותו מרכז. ההוכחה מסתמכת על טענה הבאה:

טענה. נניח שהעתקה ספירלית עם מרכז בנקודה O מעבירה נקודה G לנקודה S, ונקודה H לנקודה T. נניח שהישרים GS ו-HT נפגשים בנקודה X. אז הנקודות O, G, H, X על מעגל אחד. כמו כן, הנקודות O, S, T, X על מעגל אחד.

מהטענה ברור, איך למצוא את המרכז של ההעתקה ספירלית שמעבירה את הקטע GH לקטע ST: בונים נקודה X בתור נקודת מפגש הישרים GS ו-HT, בונים מעגלים XGH ו-XST; מעגלים אלה נחתכים בשתי נקודות שאחת מהן X והשנייה היא המרכז O.

הטענה פותרות מיד את השאלה. אכן, קיימת העתקה ספירלית שמעבירה את הריבוע ABCD לריבוע KLMN. בפרט, היא מעבירה את הקטעים KL, LM, MN, NK לקטעים AB, BC, CD, DA בהתאמה. אם ננסה לבנות את מרכז ההעתקה באמצעות השיטה שתיארנו, לכל זוג של קטעים מתאימים, נקבל את 8 המעגלים שהופיעו בניסוח השאלה, וכולם עוברים דרך מרכז ההעתקה. נשאר להוכיח את הטענה.

קודם נזכיר את מושג הזווית המכוונת. זווית מכוונת $\measuredangle(GS,HT)$ זאת זווית שבה צריך לסובב נגד כיוון השעון כדי שהישר GS יהפוך לישר HT או לישר שמקביל ל-HT.
זווית מכוונת מוגדרת מודולו π, כלומר מודולו 180°, מכיוון שסיבוב בכפולה של 180° שומר על הכיוון של ישר.
יש מספר תכונות שנרשמים יותר קצר בזוויות מכוונות מאשר בזוויות הרגילות. כך למשל, לכל 3 ישרים ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 מתקיים $\measuredangle(\ell_1,\ell_2)+\measuredangle(\ell_2,\ell_3)=\measuredangle(\ell_1,\ell_3)$, בזמן שבזוויות הרגילות יש מספר מקרים לשוויון זה. דוגמה נוספת שחשובה עבור ההמשך היא התנאי לכך ש-4 נקודות שנמצאות על מעגל אחד: $\measuredangle(AB,BC)=\measuredangle(AD,DC)$, בזמן שבזוויות הרגילות יש להפריד לשני מקרים: $\measuredangle ABC=\measuredangle ADC$ אם B ו-D באותו צד של AC, אבל אם הם בצדדים שונים אז $\measuredangle ABC=180^\circ-\measuredangle ADC$.

כעת נוכיח את הטענה ובזה נסיים את הפתרון.

הוכחת הטענה. אנו מניחים שקיימת העתקה ספירלית עם מרכז O, זווית α ויחס ρ שמעבירה את GH ל-ST. כלומר סיבוב נגד כיוון השעון ב-α מעביר את הקרן OG לקרן OS, ואת הקרן OH לקרן OT, ובנוסף $\frac{OS}{OG}=\rho=\frac{OT}{OH}$. נגיד שהסיבוב בזווית β יעביר את הקרן OG לקרן OH. אז הסיבוב באותה הזווית β יעביר גם את הקרן OS לקרן OT. כמו כן, $\frac{OS}{OT}=\frac{OG}{OH}=\sigma$. לכן העתקה ספירלית אחרת אבל עם אותו המרכז O מעבירה הקטע GS ל-HT.
אנו רוצים להוכיח כי X, G, H, O נמצאות על מעגל אחד (המעגל השני מוכח באותה צורה). זה כמו לבדוק שוויון זוויות: $\measuredangle(GO,OH)=\measuredangle(GX,XH)$. אבל הישר GX הוא הישר GS, והישר XH הוא הישר HT. כלומר צריך לבדוק שוויון זוויות
$$\measuredangle(GO,OH)=\measuredangle(GS,HT)$$
אבל שתי הזויות שוות β. הרי העתקה ספירלית שיש בה סיבוב בזווית β (ומתיחה ששומרת על כיוונים) מעבירה את OG ל-OH, ואת GS ל-HT.

5. נסמן ב-X, Y ו-Z נקודות על צלעות המשולש ABC (אך לא על המשכיהן) שבהן צלעות המשולש משיקות למעגלים החסומים מבחוץ המתאימים. הוכיחו, שמרכז המעגל החוסם של משולש XYZ נמצא על המעגל החוסם של ABC אם ורק אם המשולש ABC הוא ישר זווית.
הערה. כיוון אחד של השאלה היה שאלה 3 ב-IMO ב-2013 (וגם שאלה אחרונה ברשימת שאלות הגיאומטריות בשורטליסט.)

פתרון. נסמן ב-D, E ו-F את האמצעים של הקשתות ACB, ABC ו-BAC בהתאמה. לפי מה שהוכחנו בשאלה 1, $EX=EZ$, ובאופן דומה גם $DY=DZ$, וגם $FX=FY$. בשביל לבדוק את התנאי שדרוש בטענה של שאלה 1, צריך לוודא כי $AZ=CX$. קל להשתכנע בזה באמצעות חשבון משיקים פשוט. אם נסמן ב-a,b,c את אורכי הצלעות מול A,B,C ונסמן גם את חצי-היקף ב-p, אז קל להבין שהמשיק מנקודה A למעגל חסום מבחוץ לצלע BC הוא באורך p, ולכן אורך המשיק מנקודה C לאותו המעגל הוא $p-a$ (לא משנה איזה משיק, כי שני המשיקים מנקודה למעגל הם באותו אורך). כלומר $CX=p-a$ ובאופן דומה גם $AZ=p-a$, לכן $CX=AZ$.
לכן, אם נצייר אנכים אמצעים של המשולש XYZ, מאמצע של כל צלע לכיוון החוצה מהמשולש, אז נקבל שהקרניים האלה יחתכו את המעגל החוסם של המשולש ABC בנקודות D, E ו-F. לכן אם מרכז המעגל החוסם של XYZ נמצא על המעגל החוסם של ABC, הוא חייב להיות B, E או F.

נניח כי מרכז המעגל XYZ נמצא על המעגל החוסם של ABC. לה"כ כי מדובר על E. נקודה E היא בכל מקרה נמצאת על האנך האמצעי של XZ, ועל מנת שהיא תהיה מרכז המעגל XYZ צריך להתקיים $\sphericalangle XEZ=180^\circ-\sphericalangle XYZ$. נשים לב כי הנקודות X, B, E, Z נמצאות על מעגל אחד: אכן, כמו שצוין בשאלה 1, סיבוב סביב E מעביר בו-זמנית את A ל-C ואת Z ל-X ולכן $\sphericalangle XEZ=\sphericalangle CEA=\sphericalangle CBA=\sphericalangle XBZ=\beta$.
האנכים מנקודה E לצלעות XY, YZ הם האנכים האמצעים, ולכן הם עוברים בנקודות F ו-D בהתאמה. לכן $\sphericalangle XYZ=180^\circ-\sphericalangle DEF$. יהיו D',E',F' נקודות נגדיות על המעגל החוסם לנקודות D,E,F בהתאמה. אז

$$\sphericalangle DEF=\sphericalangle D'E'F'=\tfrac{1}{2}D'F'=\tfrac{1}{4}CBA=\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)=90^\circ-\frac{\beta}{2}$$

כלומר מתקבל $\tfrac{1}{2}\beta=\tfrac{1}{2}\sphericalangle XEZ=180^\circ-\sphericalangle XYZ=180^\circ-\left(90^\circ+\tfrac{1}{2}\beta\right)$, במילים אחרות $\beta=90^\circ$.

נשאר להוכיח את הכיוון השני: אם $\beta=90^\circ$, אז E הוא מרכז של XYZ. כבר ראינו כי בכל מקרה $\sphericalangle XEZ=\beta$ שזאת זווית ישרה במקרה שלנו. לכן מספיק לוודא כי $\sphericalangle ZYX=90^\circ$ במקרה זה.
כמו שהראנו כי XBEZ חסום, כך גם XFYC, YZAD חסומים, ולכן $\sphericalangle YZD=\alpha$, וכן $\sphericalangle XFA=\gamma$. לכן במשולשים שווי-שוקיים XYF, ZYD נמצא כי $\sphericalangle XYF=90^\circ-\tfrac{1}{2}\gamma$, וגם $\sphericalangle ZYD=90^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha$. אבל

$$360^\circ=\sphericalangle XYZ+\sphericalangle ZYD+\sphericalangle DYF+\sphericalangle FYX$$

ולכן התנאי לכך ש-$\sphericalangle XYZ=135^\circ$ הוא זה ש-$\sphericalangle FYD=90^\circ$ (הרי $\alpha+\gamma=90^\circ$).

סימטריה ביחס למרכז המעגל, שהוא גם האמצע של AC מעבירה את D ל-'D (אמצע הקשת BC), את F ל-'F (אמצע הקשת AB) ואת Y ל-'Y שהיא נקודה השקה של המעגל החסום של ABC עם היתר AC. צריך להוכיח כי $\sphericalangle A'Y'D'=90^\circ$.
נקודה I, שהיא המרכז של המעגל החסום ב-ABC, נמצאת על 'AD ו-'CF. הזוויות $\sphericalangle IF'A$ ו-$\sphericalangle ID'C$ ישרות כי הן בעצם נשענות על הקוטר AC במעגל ABC. גם 'IY

מאונך ל-AC. לכן מעגל שקוטרו IA עובר ב-Y' וב-F', ומעגל שקוטרו IC עובר ב-Y' וב-D'. לכן $\sphericalangle IY'D' = \sphericalangle ICD' = \sphericalangle F'CD' = \frac{1}{2}F'BD'$, ובאופן דומה

$$\sphericalangle IY'F' = \sphericalangle IAF' = \sphericalangle F'AD' = \tfrac{1}{2}F'BD'$$

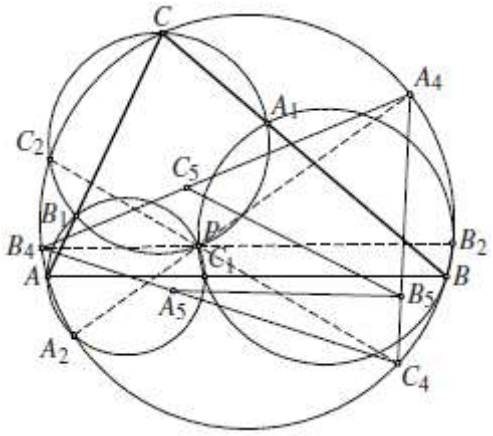
אבל במעגל ABC, מתקיים $BF' = F'A$, $BD' = D'C$, לכן $F'BD' = 90^\circ$, ולכן

$$\sphericalangle IY'F' = 45^\circ = \sphericalangle IY'D'$$

ומכאן $\sphericalangle D'Y'F' = 90^\circ$. מש"ל.

6. נקודות A_1, B_1 ו-C_1 נמצאות על הצלעות BC, AC ו-AB בהתאמה. המעגלים החוסמים של AB_1C_1, A_1BC_1, A_1CA_1 חותכים שוב את המעגל החוסם של המשולש ABC גם בנקודות A_2, B_2 ו-C_2 בהתאמה, שנבדלות מהנקודות A, B ו-C. נקודה A_3 סימטרית לנקודה A_1 ביחס לאמצע הצלע; נקודות B_3 ו-C_3 מוגדרות באופן סימטרי. הוכיחו כי $A_2B_2C_2$ דומה למשולש $A_3B_3C_3$.

פתרון. כל הזוויות אצלנו יהיו זוויות מכוונות מודולו 180°, כלומר $\sphericalangle XYZ = \sphericalangle(XY, YZ)$. לפי הלמה של מיקל (והיא תרגיל לקוראים בחשבון זוויות), המעגלים CA_1B_1, BA_1C_1, AB_1C_1 נפגשים בנקודה אחת, שנקרא לה P.



נסמן ב-O את מרכז המעגל החוסם של ABC.
נסמן $\varphi = \sphericalangle PB_1C = \sphericalangle PC_1A = \sphericalangle PA_1B$ (שוויון הזוויות ברור מהמעגלים).
הישרים A_2P, B_2P ו-C_2P חותכים את המעגל ABC שוב בנקודות A_4, B_4 ו-C_4 בהתאמה. מכיוון ש-

$$\sphericalangle A_4A_2A = \sphericalangle PA_2A = \sphericalangle PC_1A = \varphi,$$

כלומר $\sphericalangle A_4OA = 2\varphi$, ודבר דומה ניתן להגיד על B_4 ו-C_4, אז המשולש $A_4B_4C_4$ מתקבל מהמשולש ABC באמצעות סיבוב $\mathcal{R}$ (בזווית 2φ סביב O). לכן $\sphericalangle(AB_4, PC_1) = \sphericalangle B_4AB + \sphericalangle AC_1P = \varphi - \varphi = 0$. במילים אחרות $PC_1 \parallel AB_4$.

נסמן ב-C_5 את נקודת המפגש של PC_1 עם A_4B_4. באופן דומה נגדיר גם את B_5 ו-A_5. אז $\sphericalangle B_4C_5P = \sphericalangle A_4B_4A = \varphi$, לכן $AB_4C_5C_1$ הוא טרפז שווה שוקיים. ולכן $BC_3 = AC_1 = B_4C_5$. באופן דומה, $AC_3 = A_4C_5$, לכן C_3 מתקבל מ-C_5 באמצעות הסיבוב $\mathcal{R}$. טענה דומה מתקיימת עבור A_5 ו-B_5, כלומר $\mathcal{R}$ מעביר את $A_3B_3C_3$ ל-$A_5B_5C_5$. נשאר להראות שהמשולש $A_2B_2C_2$ דומה למשולש $A_5B_5C_5$.
ראינו כי $\sphericalangle A_4B_5P = \sphericalangle B_4C_5P$, כלומר נקודה P נמצאת על המעגל $A_4B_5C_5$. באופן דומה, P נמצאת גם על המעגל $C_4A_5B_5$. לכן מתקבל שוויון זוויות:

$$\begin{aligned}\sphericalangle A_2B_2C_2 &= \sphericalangle A_2B_2B_4 + \sphericalangle B_4B_2C_2 = \sphericalangle A_2A_4B_4 + \sphericalangle B_4C_4C_2 \\ &= \sphericalangle PA_4C_5 + \sphericalangle A_5C_4P = \sphericalangle PB_5C_5 + \sphericalangle A_5B_5P = \sphericalangle A_5B_5C_5\end{aligned}$$

ודומה גם לזוויות אחרות, שזה מה שרצינו.