תרגיל 3

1. נתון משולש ABC שאינו שווה שוקיים. נקודות Z ו-X נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה, ומקיימות $AZ = CX$. נקודה E היא אמצע הקשת של המעגל החוסם, שמכילה את B וקצותיה הן A ו-C. הוכיחו כי הנקודות B, E, X, Z נמצאות על מעגל אחד, וכי $EZ = EX$.

2. נתון משולש ABC, שחסום בו מעגל שמרכזו I. נקודות Z ו-X נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה. הוכיחו כי X, Z, I ו-B נמצאות על מעגל אחד אם ורק אם $AZ + CX = AC$.

3. הריבועים ABCD, KLMN מכוונים שניהם נגד כיוון השעון (לאו דווקא מקבילים). הישרים AK ו-BL נפגשים בנקודה P, הישרים BL ו-CM בנקודה Q, הישרים CM ו-DN בנקודה R, והישרים DN ו-KA בנקודה T. הוכיחו ש-8 המעגלים החוסמים של PAB, PKL, QBC, QLM, RCD, RMN, TDA, TNK נפגשים בנקודה אחת.

4. על הגבהים (אך לא על המשכיהם) של משולש חד-זוויות ABC נלקחו נקודות A_1, B_1, C_1, כל נקודה על גובה מנקודה עם השם התואם, כך שסכום השטחים של המשולשים ABC_1, AB_1C ו-A_1BC שווה לשטח של המשולש ABC. הוכיחו כי A_1, B_1, C_1 ונקודת מפגש הגבהים H של המשולש נמצאות על מעגל אחד.

5. נסמן ב-X, Y ו-Z נקודות על צלעות המשולש ABC (אך לא על המשכיהן) שבהן צלעות המשולש משיקות למעגלים החסומים מבחוץ המתאימים. הוכיחו, שמרכז המעגל החוסם של משולש XYZ נמצא על המעגל החוסם של ABC אם ורק אם המשולש ABC הוא ישר זווית.

6. נקודות A_1, B_1 ו-C_1 נמצאות על הצלעות BC, AC ו-AB בהתאמה. המעגלים החוסמים של C_1AB_1, A_1BC_1, B_1CA_1 חותכים שוב את המעגל החוסם של המשולש ABC גם בנקודות A_2, B_2 ו-C_2 בהתאמה, שנבדלות מהנקודות A, B ו-C. נקודה A_3 סימטרית לנקודה A_1 ביחס לאמצע הצלע; נקודות B_3 ו-C_3 מוגדרות באופן סימטרי. הוכיחו כי $A_2B_2C_2$ דומה למשולש $A_3B_3C_3$.