תרגיל 2

1. נתונים מספרים טבעיים x,y,z המקיימים $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. מספר טבעי הכי גדול שבו מתחלקים x, y ו-z בו-זמנית הוא d. הוכיחו כי $xyzd$ הוא ריבוע שלם.

פתרון. אם $d>1$, נוכל להגדיר מספרים חדשים $x'=\frac{x}{d}$, $y'=\frac{y}{d}$, $z'=\frac{z}{d}$ ואז גם x',y',z' מקיימים $\frac{1}{x'}-\frac{1}{y'}=\frac{1}{z'}$, אבל אין אף מספר גדול מ-1 שמחלק את x',y',z' בו-זמנית.

אז $xyzd=x'y'z'\cdot d^4$, לכן מספיק להוכיח ש-$x'y'z'$ הוא ריבוע שלם. ובכן, מספיק לפתור את השאלה כאשר אין ל-x,y,z אף מחלק משותף גדול מ-1. לכן מעכשיו נקבל את התנאי של $d=1$ כנתון.

המשוואה הנתונה היא בעצם $z(y-x)=xy$. לכן $z=ab$ כאשר a הוא מחלק של x ו-b הוא מחלק של y, כלומר $x=ak$, ובנוסף $y=b\ell$. מכאן קל לראות ש-$y-x=k\ell$. לכן

$$(*)\qquad ak-b\ell=k\ell$$

קל לראות ש-a זר ל-ℓ, אחרת היינו מקבלים שיש ראשוני p שמחלק את a ואת ℓ ואז את x,y,z בו-זמנית בניגוד להנחה. באופן דומה b זר ל-k. אבל במשוואה (*) קל המחוברים בשני האגפים חוץ מ-ak מתחלקים ב-ℓ, לכן ak מתחלק ב-ℓ, לכן k מתחלק ב-ℓ. באופן דומה רואים שגם ℓ מתחלק ב-k. לכן $k=\ell$.

לכן $x\cdot y\cdot z=ak\cdot b\ell\cdot ab=(abk)^2$.

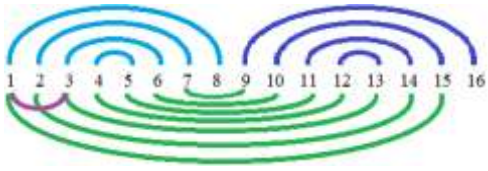
מש"ל.

2. האם אפשר לסדר מספרים מ-1 עד 16

(א) בשורה

(ב) במעגל

כך שסכום של כל שני מספרים סמוכים יהיה ריבוע שלם?



פתרון. השאלה נראית כמו שאלה על מספרים, אבל בעצם זאת שאלה על גרף. קודקודים בגרף הם מספרים מ-1 עד 16, ומחברים אותם בקשתות כמו בציור: כאשר הסכום הוא 4, 9, 16, או 25. מכאן ישר רואים שאי-אפשר לסדר את המספרים במעגל, מכיוון ש-16 מחובר רק למספר אחד, וכך גם 8. יש תקווה לסדר אותם בשורה, אבל אז 16 ו-8 צריכים להיות בקצוות השורה. לכן בקצה אחד של שורה רשום 16 ולידו 9 ולידו יכול להיות רק 7 ולידו 2, ולידו 14, ולידו 11, ולידו 5 ולידו 4, ולידו 12, ולידו 13, ולידו 3. עד כן הכל היה חד-משמעי, כי לכל קודקוד שעברנו בגרף היו 2 קשתות: נכנסים באחת הקשתות וחייבים לצאת בשנייה. אבל אחרי שהגענו ל-3 יש שתי אופציות להמשך: 1 או 6. לכן ננסה לבנות מהקצה השני: בקצה רשום 8 ולידו 1, שממנו אפשר להמשיך או ל-3 או ל-15. אבל חייבים להמשיך ל-15, כי אם

נמשיך ל-3 אז כמו שראינו כבר בהמשך יהיה 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9, 16 ואז מספרים מסוימים (למשל 15) לא יופיעו בשורה. לכן ניתן להתעלם מהקשת הסגולה בציור, ואז חוץ מ-8 ו-16 לכל מספר מחוברים בדיוק 2 קשתות, והשורה נקבעת בצורה יחידה (עד כדי כיוון):

16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

3. הראו כי $\left\lfloor \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rfloor$ הוא מספר זוגי לכל n שלם.

פתרון. קל לראות שעבור $n<6$ המספר שווה ל-0 ולכן זוגי. לכן מעכשיו ננית כי $n\geq 6$.

אם n ו-$n+1$ אינם ראשוניים, אז אפשר לפרק אותם לגורמים $n=a\cdot b$, $n+1=c\cdot d$, ולכן a ו-b זרים ל-c ו-d, הרי n זר ל-$n+1$. אפשר להניח שרק מספר אחד מבין a,b,c,d זוגי. אם ניתן להניח בנוסף ש-$a\neq b$ ו-$c\neq d$ אז המכפלה $(n-1)!$ מכילה את המספרים a,b,c,d ועוד מספר זוגי, לכן המספר $\frac{(n-1)!}{n(n+1)}=\frac{(n-1)!}{abcd}$ שלם וזוגי.

אם אי-אפשר להניח ש-$a\neq b$ ו-$c\neq d$, אז n או $n+1$ הוא p^2, ריבוע של מספר ראשוני. אבל $n\geq 6$ ולכן $p\geq 3$ ואז $n\geq 9$ ניתן למצוא במכפלה $(n-1)!$ לפחות שני מספרים שמתחלקים ב-p, ואז בכל מקרה מקבלים מספר זוגי שלם אפילו בלי לקחת חלק שלם.

נשאר לבדוק מקרה שבו n או $n+1$ ראשוני, אז $\frac{(n-1)!}{n(n+1)}$ אינו שלם.

נניח ש-n ראשוני. אז לפי משפט ווילסון $(n-1)!=-1\pmod n$. לכן $(n-1)!+n+1$ מתחלק ב-n, וגם ב-$n+1$, הרי $n+1$ מתפרק לגורמים $n+1=a\cdot b$. אם a,b שונים אז הם גורמים במכפלה $(n-1)!$, ואז מתחלק ב-$n+1$ וגם $(n-1)!+n+1$ מתחלק ב-$n+1$. אבל אם לא ניתן להניח ש-a,b שונים, אז $n+1$ הוא ריבוע של ראשוני. אבל מכיוון ש-$n\geq 6$, אז יש במכפלה $(n-1)!$ לפחות שני מספרים שמתחלקים במספר ראשוני זה.

ובכן, $(n-1)!+n+1$ מתחלק גם ב-n וגם ב-$n+1$, לכן הוא מתחלק גם ב-$n\cdot(n+1)$. המספר n אי-זוגי כי הוא ראשוני ו-$n\geq 6$. המספר $n+1$ זוגי. קל לראות ש-$n-1$ מתחלק בחזקה יותר גבוהה של 2 מאשר $n+1$, לכן $\frac{(n-1)!}{n+1}$ מספר זוגי, ולכן $\frac{(n-1)!+n+1}{n+1}$ אי-זוגי ולכן גם $\frac{(n-1)!+n+1}{n(n+1)}$ אי-זוגי. אבל $\frac{n+1}{n(n+1)}<1$ ולכן

$$\left\lfloor \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rfloor = \frac{(n-1)!+n+1}{n(n+1)} - 1$$

זוגי.

נניח ש-$n+1$ ראשוני. לפי משפט וילסון, $(n-1)!=1 \pmod{n+1}$. לכן $(n-1)!+n$ מתחלק ב-$n+1$. אבל גם קל להוכיח (לא נפרט כי במהלך הפתרון כבר עשינו דבר דומה מספר פעמים) כי $(n-1)!$ מתחלק ב-n, לכן $(n-1)!+n$ מתחלק גם ב-n וגם ב-$n+1$, ולכן הוא מתחלק גם ב-$n(n+1)$. קל לבדוק גם ש-$(n-1)!$ מתחלק בחזקה יותר גדולה של 2 מאשר n, לכן $\frac{(n-1)!}{n}$ זוגי, לכן $\frac{(n-1)!+n}{n}$ אי-זוגי. לכן גם המספר $\frac{(n-1)!+n}{n(n+1)}$ אי-זוגי. אבל $\frac{n}{n(n+1)}<1$, לכן

$$\left\lfloor \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rfloor = \frac{(n-1)!+n}{n(n+1)} - 1$$

וזה מספר אי-זוגי.

4. שלומי רושם על הלוח ספרה לא אפסית. לאחר מכן הוא רושם בכל שלב מצד ימין למספר שכבר רשום עוד ספרה לא אפסית, ובכך מקבל מספר יותר. הוא ממשיך בתהליך זה עד שמתקבל מספר של 1000000 ספרות. ריבי מאושרת כל פעם שהמספר שרשום על הלוח הוא ריבוע שלם. הוכיחו שריבי תהיה מאושרת לכל היותר 100 פעמים.

פתרון. נניח שבשלב k מתקבל ריבוע שלם x^2 ובשלב $k+2m$ שוב מתקבל ריבוע שלם y^2. אז $y^2 > x^2 \cdot 10^{2m} = \left(10^m x\right)^2$, כי הוסיפו ספרות לא אפסיות מימין (לו היו מוסיפים ספרות אפסיות אז היינו מקבלים את $\left(10^m x\right)^2$ בדיוק). לכן $y > 10^m x$ במילים אחרות $y \geq 10^m x+1$. לכן $y^2 \geq \left(10^m x+1\right)^2 = 10^{2m}x^2 + 2\cdot 10^m x + 1$.

אבל אם מחליפים מ-$2m$ ספרות ימניות באפסים, צריך להתקבל בדיוק $10^{2m}x^2$. לכן המספר $2\cdot 10^m x+1$ קטן מ-10^{2m}. לכן $2x$ קטן מ-10^m, מכאן $10^{2m} > x^2$. אבל x^2 הוא מספר k-ספרתי, כלומר $x^2 \geq 10^{k-1}$, לכן $10^{2m} > 10^{k-1}$, כלומר $2m \geq k$. כלומר כמות הספרות צריכה לפחות להכפיל את עצמה בין ריבוע לריבוע, לפחות עם מדובר על שני שלבים זוגיים או שני שלבים אי-זוגיים.

מצד שני, המשחק כולל 1000^2 שלבים, וזה קטן מ-2^{20}, כלומר יכולים להיות לכל היותר 2^{20} ריבועים בשלבים זוגיים ו-2^{20} ריבועים בשלבים אי-זוגיים.

5. הראו שסכום הספרות של $2^{4^{1000001}}$ גדול מ-1000000.

פתרון. הספרה האחרונה (הימנית) של $2^{4^{1000001}}$ לא מתאפסת. לא יתכן שלפנייה יש שלושה אפסים ברצף, כי אחרת המספר שמורכב מ-4 ספרות האחרונות לא מתחלק ב-16, ואז כל המספר לא מתחלק ב-16 (הרי כל כפולה של 10^4 מתחלקת ב-16).

באופן דומה לא יתכן שאם u הוא מספר שמורכב מ-k ספרות ימניות, אז $3k$ ספרות שלפניו אפסים, הרי $u < 16^k$, וכל מספר שמסתיים ב-$4k$ אפסים מתחלק ב-16^k.

לכן אם נתבונן במספרים שמורכבים מ-1, 4, 16, ..., 4^n, ... ספרות אחרונות, תמיד מתווספת ספרה לא אפסית. המספר הנתון הוא $2^{4\cdot 4^{1000000}} = 16^{4^{1000000}} > 10^{4^{1000000}}$, כלומר יש לו $4^{1000000}$ ספרות לפחות (בעצם יותר), ומתוכם יש לפחות 1000000 ספרות לא אפסיות. לכן אפילו אם כל הספרות אפסים או אחדים, סכום הספרות לפחות 1000000. הספרה האחרונה היא זוגית, לכן סכום הספרות בעצם גדול מ-1000000.

6. עבור איזה n, מבין כל n מספרים שלמים שונים ניתן לבחור 4 מספרים שלמים שונים a , b , c ו- d כך ש- $a+b-c-d$ מתחלק ב-20?

פתרון. ברור שצריך להתבונן בשאריות של המספרים מודולו 20. נניח שיש בקבוצה נתונה בסה"כ k שאריות שונות. אם יש $k+1$ מספרים או יותר אז יש שניים אם אותה שארית. לכן אם יש $k+3$ מספרים אז יש ארבע מספרים שונים, a,b,c,d כך ש-

$$a = c \pmod{20}$$
$$b = d \pmod{20}$$

ואז $a+b-c-d$ מתחלק ב-20. לכן יש לכל היותר $k+2$ מספרים.

מבין k שאריות שונות מודולו 20 ניתן לבחור ליצור $\binom{k}{2}$ זוגות של שאריות. אם $k \geq 7$ אז $\binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$. לכן שארית מסוימת נוצרת בשני דרכים קיימים a,b,c,d מהמספרים הנתונים כך ש- $a+b = c+d \pmod{20}$, והזוג $\{a,b\}$ הוא לא אותו זוג כמו $\{c,d\}$ מודולו 20. לא יתכן כי $a = c \pmod{20}$, כי אז $b = d \pmod{20}$, והנחנו שזה לא אותו זוג של שאריות. לכן $a \neq c$ (אפילו מודולו 20) וגם $a \neq d$ מאותה סיבה, וגם $b \neq c,d$ מאותה סיבה, וכמובן גם $a \neq b$, $c \neq d$ כי בחרנו זוגות של שאריות שונות.

בכל מקרה, מקבלים 4 מספרים שונים כך ש- $a+b = c+d \pmod{20}$.

לכן $k \leq 6$, ויש לכל היותר $k+2 \leq 8$ מספרים. כלומר יכולים להיות לכל היותר 8 מספרים.

ננסה לבנות דוגמה עבור 8 מספרים, עם 6 שאריות, ששארית מסוימת מופיע 3 פעמים.

ניקח מספרים 0, 20, 40, ובנוסף מספרים עם שאריות שונות שיתנו סכומים שונים, כאשר כל פעם נוסף מספר טבעי הכי קטן שאפשר.

בהתחלה נוסיף 1, ואז סכומים בכל הזוגות יהיו 0 או 1 מודולו 20.

אחר-כך נוסיף 2, ואז הסכומים שנוצרים בזוגות החדשים הם 2 או 3 מודולו 20, וזה שונה מכל הסכומים שהיו קודם. נוסיף 4, ואז נוצרים סכומים 4, 5, 6 וזה שונה מכל הסכומים שהיו קודם. נוסיף 7, ואז נוצרים סכומים 7, 8, 9, 11 וזה שונה מהסכומים שהיו קודם.

להוסיף 10 זה לא חכם כי אז $11 = 1+10$ וזה כבר היה, אבל אפשר להוסיף 12.

הזוגות שנוצרים הם 12, 13, 14, 16, 19. ובכן קיבלנו 8 מספרים

0, 20, 40, 1, 2, 4, 7, 12

וכל הזוגות שלא משתמשים באותו מספר נותנים סכומים שונים, לכן לכל a,b,c,d שונים בקבוצה $a+b \neq c+d \pmod{20}$.