תרגיל 2

1. נתונים מספרים טבעיים x,y,z המקיימים $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. מספר טבעי הכי גדול שבו מתחלקים x, y ו-z בו-זמנית הוא d. הוכיחו כי $xyzd$ הוא ריבוע שלם.

2. האם אפשר לסדר מספרים מ-1 עד 16
(א) בשורה
(ב) במעגל
כך שסכום של כל שני מספרים סמוכים יהיה ריבוע שלם?

3. הראו כי $\left\lfloor \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rfloor$ הוא מספר זוגי לכל n שלם.

4. שלומי רושם על הלוח ספרה לא אפסית. לאחר מכן הוא רושם בכל שלב מצד ימין למספר שכבר רשום עוד ספרה לא אפסית, ובכך מקבל מספר יותר. הוא ממשיך בתהליך זה עד שמתקבל מספר של 1000000 ספרות. ריבי מאושרת כל פעם שהמספר שרשום על הלוח הוא ריבוע שלם. הוכיחו שריבי תהיה מאושרת לכל היותר 100 פעמים.

5. הראו שסכום הספרות של $2^{4^{1000001}}$ גדול מ-1000000.

6. עבור איזה n, מבין כל n מספרים שלמים שונים ניתן לבחור 4 מספרים שלמים שונים a , b , c ו-d כך ש-$a+b-c-d$ מתחלק ב-20?