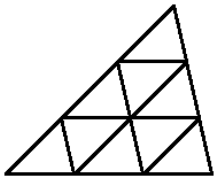
תרגיל 1

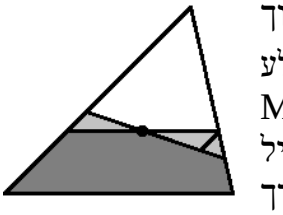
1. על קו המשווה של כוכב לכת מרוחק צומחים מספר עצים, וכולם באותו גובה. אם כל העצים יפלו מערבה, הם יכסו 100 קילומטרים מקו המשווה. האם אפשר לטעון שגם אם כל העצים יפלו מזרחה, הם יכסו אותו אורך?

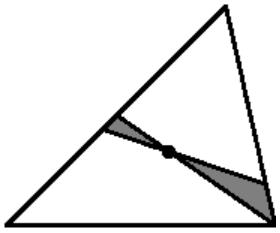
פתרון. נניח שגובה של כל עץ הוא H. על מנת לעבור ממצב של כל העצים נפלו מזרחה למצב של כל העצים נפלו מערבה, צריך לסובב כל עץ במקום ולהזיז אותו ב- H מזרחה. ברור שכל אחת מהפעולות הללו לא משפיע על האורך הכולל שהעצים מכסים.
(קל לראות שאם לא כל העצים באותו אורך, אז יכול להיות הבדל בין נפילה מזרחה לנפילה מערבה.)

2. איליה ותומר מחלקים עוגה מישורית בצורת משולש. איליה מסמן נקודה על העוגה. תומר חותך את העוגה בקו ישר לשני חלקים דרך הנקודה שאיליה סימן, ואוכל את אחד משני החלקים. איליה אוכל את החלק השני שנשאר לו. בהנחה ששניהם מאוד אוהבים עוגות וטובים בגיאומטריה, איזה חלק מהעוגה יקבל כל אחד מהם?



תשובה. תומר מקבל $\frac{5}{9}$ מהעוגה.
פתרון. ברור שתומר ייקח את החלק הגדול יותר מהעוגה.
נחלק כל צלע ל-3 חלקים שווים, ודרך נקודות החלוקה נעביר ישרים מקבילים לצלעות. ישרים אלה מחלקים את המשולש ל-9 משולשים קטנים יותר. באמצע נוצרת נקודה M שמרחק ממנה לכל צלע שווה לשליש גובה לאותו הצלע (קל לראות שהנקודה M היא בעצם נקודת מפגש התיכונים).
אם איליה בוחר נקודה N שהיא לא M, אז יש צלע מסוימת של משולש עבור N נמצאת בתוך אחד מ-4 המשולשים הקטנים שרחוקים מהצלע. תומר יוכל לחתוך את העוגה במקביל לאותה צלע, ואז לאיליה יישאר פחות מ-$\frac{4}{9}$.
נניח כעת שאיליה בוחר את M. ברור שאם תומר יחתוך במקביל לצלע כלשהי, יקבל בדיוק $\frac{5}{9}$. אבל הוא יכול גם לחתול בקו משופע כלשהו, שחייב לחתוך שתי צלעות, נגיד בנקודות X ו-Y. יש גם קו דרך M שמקביל לצלע השלישית וחותך אותן שתי צלעות, בנקודות K ו-L בהתאמה. M הוא אמצע של KL. נניח ש-X יותר רחוקה מצלע המשולש שמקביל ל-KL מאשר Y. אז הישר דרך L שמקביל לצלע KX עובר דרך נקודה פנימית Z של MY. משולשים MKX ו-MLZ חופפים, ולכן משולש MLY גדול יותר. לכן כאשר משווים את החלק המשרושי המתקבל כאשר חותכים לפי XY לחלק המשולשי שמתקבל כאשר חותכים לפי KL, במקרה הראשון מקבלים מרובע גדול יותר.
מכאן גם רואים בבירור ש-MY גדול מ-MX, כלומר מבין שני הקצוות X ו-Y הזה שקרוב יותר לצלע השלישית יותר רחוק מ-M.





לכן אם נמשיך לסובב את הקו עד שיעבור בקודקוד, השטח של המרובע עוד יקטן עד שיגיע לחצי (הרי תיכון מחלק את השטח של המרובע לשני חלקים שווים).
לכן לתומר תמיד כדאי לקחת את המרובע, והמרובע הוא לכל היותר $\frac{5}{9}$, והשוויון יתקבל אר אם הקטע מקביל לצלע.

3. קדחו N^3 קוביות ($N>1$) זהות לאורך האלכסונים הראשיים, השחילו אותן על חוט וקשרו את החוט, כך שנוצרה מחרוזת ללא רווחים. עבור איזה N ניתן לסדר את המחרוזת לקובייה $N\times N\times N$?

תשובה. עבור N זוגי.
פתרון. נבחר מערכת צירים לאורך למקצועות הקוביה, כך שיחידת המדידה היא הצלע של הקוביה הקטנה. אם הולכים לפי החוט, כל פעם שעוברים על אלכסון הקוביה זוגיות של הקואורדינאטות משתנה בו-זמנית. לכן אנחנו מבקרים רק בקודקודים שיש להן שני סוגים לפי הזוגיות של קואורדינאטות, ותמיד עוברים מסוג אחד לסוג אחר. זה מגדיר בצורה חד משמעית בכל קוביה את האלכסון שצריך לקדוח (לפחות אם בוחרים את נקודת ההתחלה).
אם N אי-זוגי, אז מבחינת הזוגיות של 3 הקואורדינאטות כל הקודקודים של הקוביה הגדולה הם מהסוגים השונים. לכן יש גם פינה של קוביה הגדולה מהסוג שמופיע כל הזמן בחוט. לכן אם החוט עובר בקוביה הקטנה הפינתית, הוא חייב להגיע לפינה, ומשם הוא לא יוכל להמשיך. לכן במקרה אי-זוגי אין שרשרת.
אם N זוגי, אז אפשר לבנות את השרשרת במפורש. אפשר גם להשתמש במעגל אויילר. סוג הזוגיות של 3 הקואורדינאטות בכל פינה זהה; לכן כולן מאותו סוג. נבחר שני סוגים אחרים של זוגיות, מנוגדים בכל קואורדינאטה. נסמן את כל הקודקודים השלמים מהסוגים האלה – אלה קודקודי הגרף, ובכל קוביה נעביר אלכסון שמחבר את שני הקודקודי מהסוגים האלה – אלה קשתות הגרף. לכל קודקוד הדרגה היא 8 (אם מדובר בקודקוד פנימי), או 4 (אם הקודקוד על הפאה) או 2 (אם הקודקוד על המקצוע של הקוביה הגדולה) אבל תמיד זוגי. לכן קיים מעגל אויילר שעובר על כל הקשתות, כלומר מחרוזת שעוברת בכל הקוביות.

4. במישור סומנו 5776 ריבועים, כאשר צלעות כל ריבוע מקבילות לצלעות של כל ריבוע אחר, וכולם באותו גודל. נניח כי מבין כל 17 ריבועים יש 4 שיש להם נקודה משותפת. הוכיחו כי ניתן לסמן 14 נקודות, כך שכל ריבוע מכיל נקודה מסומנת.

פתרון. השאלה קצת קשה לאנשים (יותר מיועדת לחורפנים), ולכן נוכיח טענה יותר קלה: שניתן לסמן 20 נקודות כאלו, ואחר-כך נציג שיקול יותר עדין שמוכיח שאפשר לסמן 16 נקודות.
ניקח את הריבוע השמאלי ביותר R_1. כל ריבוע אחר מכיל את אחד מבין הפינות הימניות שלו. נסמן את שני הפינות האלה, ונתבונן כעת בכל הריבועים שלא נחתכים איתו. מבינם נבחר את הריבוע השמאלי ביותר R_2, ונסמן את שני הפינות הימניות שלו. כל ריבוע שחותך את R_2 יכיל את אחד מבין שתי הפינות. כעת נתבונן בריבוע הכי שמאלי שלא חותך לא את R_1 ולא את R_2, (אם יש כאלה) נקרא לו R_3 ונסמן את שתי הפינות שלו.
נמשיך בתהליך עד שנגדיר ריבוע R_{11}. אם הריבועים יגמרו קודם, הצלחנו לסמן 20 נקודות או פחות כך שכל ריבוע מכיל נקודה מסומנת.
אם לא, אז יש לנו 11 ריבועים שאף שניים מהם לא נחתכים $R_1, R_2, \dots, R_{11}$. נמחק את הנקודות שסומנו עד עכשיו, ונסמן נקודה אקראית בכל אחד מבין 11 הריבועים האלה.
מבין הריבועים האחרים נבחר את הריבוע השמאלי ביותר, נקרא לו Q_1. נסמן בנוסף את שני הפינות הימניות שלו. נתבונן בכל הריבועים שלא חותכים את Q_1 שהם לא R_i. מבין הריבועים אלה ניקח את הריבוע השמאלי ביותר Q_2 ונסמן את שתי הפינות הימניות שלו.

נמשיך בתהליך זה, לאחר שנבנה ריבועים $Q_1,...,Q_k$ יהיו $11+2k$ נקודות מסומנות. כל עוד $11+2k \le 20$, נוכל להוסיף ריבוע או שהצלחנו לסמן 20 נקודות או פחות, כך שכל ריבוע מכיל נקודה מסומנת. אם זה לא יקרה, נוכל לבחור ריבועים $Q_1,Q_2,...,Q_5$ שאף שניים מהם לא נחתכים.
כעת נתבונן ב-17 ריבועים: $R_1,R_2,\dots,R_{11}$ ובנוסף $Q_1,Q_2,...,Q_5$ ועוד ריבוע נוסף. כל נקודה יכולה להיות מוכלת רק ב-3 מבין הריבועים: רק R_i יחיד כי הם זרים, רק Q_j יחיד כי הם זרים, והריבוע הנוסף S. זה נוגד את התנאי.

כעת נוכיח משהו יותר חזק: שמספיק 16 נקודות.
בהתחלה נבחר תת-קבוצה מקסימלית של ריבועים זרים בזוגות: $\{R_1,R_2,...,R_n\}$.
נסמן נקודה בכל אחד מהריבועים $R_1,R_2,...,R_n$ האלה. מבין הריבועים האחרים, נבחר את הריבוע השמאלי Q_1 ביותר ונסמן את שתי הפינות הימניות שלו (כמו בהוכחה הקודמת).
עם עדיין יש לא יותר מ-16 נקודות מסומנות, אז או שכל הריבועים מכילים נקודה מסומנת, או שיש הריבועים שלא מכילים את Q_1 שהם לא $R_1,R_2,...,R_n$. הריבוע השמאלי ביותר מבין הריבועים האלה הוא Q_2. אם עדיין יש פחות מ-15 נקודות מסומנות, נסמן את שתי הפינות הימניות שלו. אם עדיין לא כל ריבוע מכיל נקודה מסומנת, מבין הריבועים שלא חותכים את Q_1 ולא את Q_2 שהם לא $R_1,R_2,...,R_n$ נסמן את הריבוע השמאלי ביותר ב-Q_3. נמשיך בתהליך, וכך נקבל ריבועים $Q_1,...,Q_k$ שהם זרים בזוגות.
התהליך יגמר לא לפני יסומנו $\left\lfloor \frac{16-n}{2} \right\rfloor$ זוגות של נקודות, לכן

$$k \ge \left\lfloor \frac{16-n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor 9 - \tfrac{n}{2} \right\rfloor$$

כעת נמחק את כל הנקודות המסומנות. אנו נוכיח שניתן לסמן n נקודות בלבד, כך שבכל אחד מהריבועים $R_1,...,R_n,Q_1,...,Q_k$ יש נקודה מסומנת. נשתמש משפט Hall. נדמיין גרף דו-צדדי, שקודקודים בצד אחד שלו הם $R_1,...,R_n$, הקודקודים בצד אחר $Q_1,...,Q_k$, וקיים קשת שמחבר R_i ל-Q_j אם לשני הריבועים יש נקודה משותפת. אנחנו רוצים להראות שקיים זיווג מושלם עבור Q (הריבועים קשורים אם יש נקודה משותפת). התנאי של משפט Hall אומר, שזה קיים אלה אם כן יש $Q_{i_1},...,Q_{i_m}$ שמקושרים לפחות מ-m ריבועי R. אז אם ניקח את ריבועי R שלא מקושרים ל-$Q_{i_1},...,Q_{i_m}$, ואת $Q_{i_1},...,Q_{i_m}$, נקבל משפחה של ריבועים זרים בזוגות יותר גדולה מ-$R_1,...,R_n$, אבל זה לא יתכן כי $R_1,...,R_n$ היא המשפחה הגדולה ביותר של ריבועים זרים שקיימת.
לכן אפשר למחוק את הנקודות המסומנות שהיו ולסמן בדיוק n נקודות כך שכל אחד מהריבועים $Q_1,...,Q_k,R_1,...,R_n$ מכיל נקודה מסומנת.
כעת נתבונן בכל הריבועים שהם לא $Q_1,...,Q_k,R_1,...,R_n$, ונפעיל עליהם אותו תהליך שבאמצעותו מצאנו את $Q_1,...,Q_k$, ונקבל עוד k ריבועים זרים $S_1,...,S_k$.
חשבון פשוט לפי הגדרת k מראה שבסך הכול סומנו $n+2k \ge 17$ ריבועים Q,R ו-S.
אבל אז יש 17 ריבועים שלאף 4 מהם אין נקודה משותפת.

5. משולש נקרא חד-זוויות אם כל הזוויות שלו חדות. במישור סומנו 100 נקודות, אף 3 מהן לא על ישר אחד. הראו שלכל היותר 70% מהמשולשים שקודקודיהם נקודות מסומנות הם חדי זוויות.

פתרון. ניקח 5 נקודות אקראיות. מתוך 5 הנקודות, ניתן ליצור 10 משולשים. אנו נוכיח שרק 7 מהם יכולים להיות חדי זוויות.
אם ניקח אפילו 4 נקודות, הקמור שלהם הוא משולש או מרובע. לכן או שזה משולש ונקודה בתוכו, או מרובע קמור.
סכום זוויות של מרובע הוא 360°, לכן אחת מזוויותיו לא חדה, ולכן יש 3 קודקודים שיוצרים משולש עם זווית לא חדה.
אם מדובר במשולש ABC ונקודה D בתוכו, אז סכום הזוויות ליד D היא 360°, לכן אחת מהם לא חדה (בעצם לפחות 2).
בכל מקרה, אם יש אפילו 4 נקודות, מתקבל משולש עם זווית לא חדה, לכן כזה משולש יש גם עבור 5 נקודות. אם נשאיר בצד אחת מהקודקודים שלו, אז מבין 4 הנקודות האחרות שוב יש משולש עם זווית לא חדה והוא שונה מהמשולש הקודם. כבר מצאנו 2 משולשים שונים מ-5 הקודקודים הנתונים. למשולשים אלה יש קודקוד משותף. אם נשאיר אותו בצד ונתבונן ב-4 הקודקודים האחרים, ניתן לבחור מהם משולש נוסף עם זווית לא חדה, והוא שונה משני המשולשים האחרים כי הוא לא משתמש באחד הקודקודים שלהם.
ובכן, בכל חמישייה של נקודות יש לפחות 3 משולשים עם זווית לא חדה, וזה לכל היותר 30%.
עם ככה זה לכל חמישייה, אז ככה זה גם בסה"כ, הרי לכל משולש (גם עם זוויות חדות, וגם עם זווית לא חדה) יש אותו סיכוי להיות בחמישייה האקראית.

6. נתונה קבוצה S של n ווקטורים לא אפסיים במישור. לכל תת-קבוצה של הקבוצה ניתן לחשב את אורך סכום הווקטורים שלה. תת-קבוצות שנותנות את אורך סכום הווקטורים הגדול ביותר נקראות תתי-קבוצות קיצוניות. מצאו את הכמות הגדולה ביותר של תתי-קבוצות קיצוניות שיכולה להיות (התשובה תלויה ב-n).

תשובה. $2n$ עבור $n>2$, ו-$2n-1$ עבור $n\le 2$.
פתרון. נצייר את הווקטורים כך שכולם מתחילים בראשית הצירים. נעביר ישר שעובר דרך הראשית (אבל לא מכיל אף ווקטור). הישר מחלק את המישור לשני חצאי מישורים. ניקח סכום של כל הווקטורים שנמצאים בחצי מישור של הלוח.
הסכום שמתקבל תלוי בבחירה של חצי-מישור. אם נסובב לאט את חצי מישור סביב הראשית סיבוב מלא, הקבוצה של הווקטורים תשתנה בשני סוגים של מצבים: כאשר חצי-המישור רוחש ווקטור וכאשר חצי-המישור משחרר ווקטור. בהינתן n ווקטורים, השינויים האלה יכולים להתרחש $2n$ פעמים לכל היותר (אולי פחות, אם יש ווקטורים באותו ישר). לכן בסה"כ יש $2n$ תתי-קבוצות שאפשר לבנות כך, באמצעות חצי-מישור.

אנו לא טוענים שבכל מצב כל תת-קבוצה שמגיעה מחצי-מישור היא מקסימלית, אבל אנחנו כן טוענים שכל קבוצה מקסימלית מתקבלת מחצי-מישור. בפרט, אם הווקטורים מסודרים במעגל, אז כאשר מקריאים אותם לפי הסדר המעגלי (עם או נגד כיוון השעון), הווקטורים של כל קבוצה מקסימלית חייבים לבוא ברצף.

אכן נניח שיש קבוצה מקסימלית K וסכום הווקטורים בקבוצה זאת הוא s. אנו טוענים כי:

(א) אם ווקטור v מבין הווקטורים הנתונים שייך לחצי-מישור $\langle v,s\rangle \geq 0$ אז $v \in \mathrm{K}$.

(ב) אם ווקטור v מבין הווקטורים הנתונים שייך לחצי-מישור $\langle v,s\rangle \leq 0$ אז $v \notin K$.

מכאן בפרט נובע, שאין אף ווקטור מבין הווקטורים הנתונים על הישר שמפריד חצאי-מישור, $\langle v,s\rangle = 0$ כי אז הוא גם מוכל וגם לא מוכל ב-K.

אכן, אם $\langle v,s\rangle \geq 0$ אבל $v \notin K$ אז אם נצרף את v ל-K אז נוכל להחליף את s בווקטור $v+s$ שהוא ארוך יותר (כי הזווית בין הווקטורים לא קהה). אבל K קבוצה מקסימלית, לכן זה לא יתכן.

באופן דומה, אם $\langle v,s\rangle \leq 0$ אבל $v \in \mathrm{K}$, אז אפשר להעיף את v מ-K. מבחינת הסכום זה כמו לצרף את $-v$ ל-K. מאותה סיבה כמו קודם, זה יגדיל את s בניגוד להנחה שהקבוצה מקסימלית.

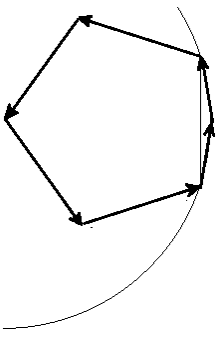
מהטענה שהוכחנו כבר ברור שיש לכל היותר $2n$ קבוצות מקסימליות, ואם יש בדיוק $2n$ אז כולן מוגדרות על ידי חצי מישור.

דוגמה פשוטה שעוזרת להגיע ל-$2n$ כאשר $n>1$ ואי-זוגי היא מצולע משוכלל עם מרכז ב-0: כל הווקטורים באותו אורך, והקרניים שלהם מחלקות את המישור ל-n זוויות שוות. קל לראות שסכום של כל הווקטורים הוא 0. כל ישר דרך הראשית שלא מכיל את אף ווקטור מחלק את הווקטורים לשני קבוצות, אחת של $\frac{n+1}{2}$ ווקטורים והשנייה של $\frac{n-1}{2}$ ווקטורים. סכום בשתי הקבוצות באותו אורך, כי סכום של שני ווקטורי הסכום שלהן הוא אפס. כל חלוקה אחרת באמצעות ישר תיתן חלוקה דומה, שאפשר להעביר לחלוקה זו באמצעות סיבוב, לכן ווקטורי הסכום באותו אורך. לכן כל חלוקה על ידי ישר נותנת שתי קבוצות, ובכל קבוצה הסכום באותו אורך, סה"כ מקבלים $2n$ קבוצות עם סכום באותו אורך. כל הקבוצות האלה מקסימליות, כי הוכחנו שאף קבוצה שנוצרה בדרך אחרת לא מקסימלית.

קיבלנו את התשובה למקרה אי-זוגי. לפני שנעבור למקרה זוגי, נטפל במקרים $n \leq 2$.

עבור $n=1$ יש שני תתי-קבוצות: זאת שמכילה את הווקטור וזאת שלא, שאחת מהם נותנת סכום לא אפסי ולכן יש קבוצה מקסימלית אחת.

עבור $n=2$ הקבוצה היא $\{v_1,v_2\}$ יש בסה"כ 4 תתי-קבוצות: ריקה, $\{v_1\}$, $\{v_2\}$ ו-$\{v_1,v_2\}$. רק קבוצות לא ריקות יכולות לתת סכום לא אפסי, לכן לא נקבל מעל 3 קבוצות מקסימליות. אפשר להגיע ל-3 במקרה אחד: אם שני הווקטורים הנתונים באותו אורך, והזווית בינם 120°.



נשאר המקרה של $n=2k>2$. גם במקרה הזה נגיע למצב של מצולע משוכלל, אבל המצולע המשוכלל הפשוט שהשתמשנו למקרה האי-זוגי לא יעבוד באותה צורה, כי אז יש זוגות של ווקטורים בכיוונים מנוגדים.

נדמיין מצולע משוכלל $A_1A_2\ldots A_{n-1}$, ועל הקשת A_1A_{n-1} של שמרכזו A_k שעובר דרך A_1 ו-A_{n-1} אמצע הקשת B. ניקח את הווקטורים (הציור מציג דוגמה עבור 6 ווקטורים)

$$v_1 = \overrightarrow{BA_1}\ ,\ v_2 = \overrightarrow{A_1A_2}\ ,\ v_3 = \overrightarrow{A_2A_3}\ ,\ \dots\ ,\ v_{n-1} = \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}\ ,\ v_n = \overrightarrow{A_nB}$$

כמו קודם, סכום כל הווקטורים שווה ל-0, כי סידרנו אותם במצולע סגור. לכן אורך הסכום בכל תת-קבוצה שווה לאורך הסכום בתת-קבוצה משלימה.

במצולע $A_1A_2...A_{n-1}$ יש $n-1$ אלכסונים הכי ארוכים: A_1A_k , A_2A_{k+1} , ... , A_kA_{n-1} , $A_{k+1}A_1$, $A_{k+2}A_2$, ... , A_nA_{k-1} . כאשר מוסיפים את הקודקוד B בין A_1 ל-A_{n-1} , מקבלים עוד אלכסון באותו אורך: A_kB , וכל האלכסונים האחרים יותר קצרים.

הווקטורים $v_1,...,v_n$ מסודרים באופן מעגלי, בציור שלנו נגד כיוון השעון. כמו שראינו קודם, סכום גדול ביותר $v_1,...,v_n$ יגול להתקבל רק כאשר בוחרים רצף בסידור מעגלי זה (אולי זה רצף שמגיע ל-v_n וממשיך מ-v_1 , אבל חוץ מזה צריך לעבור מכל וקטור לווקטור הבא ברשימה). בכל מקרה, כל סכום כזה ייתן את הווקטור של אלכסון במצולע שציירנו, וקבוצות מקסימליות מתאימות לאלכסונים הארוכים ביותר. מכיוון שבמצולע $A_1A_2...A_{n-1}B$ יש בדיוק n אלכסונים ארוכים ביותר, מתקבל שבקבוצת הווקטורים יש בדיוק $2n$ תתי-קבוצות מקסימליות.