תרגיל 11

1. למשולש ABC הוצמד מלבן BCQP. הראו שהאנך מ-A ל-BC, האנך מ-P ל-AC, והאנך מ-Q ל-AB נפגשים בנקודה אחת.

פתרון ראשון. הגבהים של משולש ABC נפגשים בנקודה אחת. נזיז את שלושת הגבהים בווקטור BP, שהוא גם הווקטור CQ, שמוכל גם בישר הגובה מ-A. נקבל 3 ישרים שגם הם נפגשים בנקודה 1, ואלה בדיוק הישרים בשאלה.

פתרון שני. לפי משפט קרנו, מספיק לבדוק:

$$\cancel{PC^2} - PA^2 + QA^2 - \cancel{QB^2} + AB^2 - AC^2 = 0$$

נשאר להוכיח טענה $QA^2 + BA^2 = PA^2 + CA^2$. זה נכון לכל נקודה A ולכל מלבן BCPQ; זו טענה ידוע ופשוטה שנשאיר כתרגיל לקורא
(קל להסיק את זה באמצעות גיאומטריה אנליטית, משפט פיתגורס או מומנט התמד).

2. למשולש חד-זוויות ABC הוצמדו שני ריבועים (מחוץ למשולש): ACKN ו-ABMI. תהא X נקודת החיתוך של BK ו-CM. הראו כי AX מאונך ל-BC.

פתרון. נצייר גם ריבוע BCUV, שגם הוא מחוץ למשולש. סיבוב ב-90° מעביר את BK ל-UA, לכן הישר BK הוא האנך מ-B ל-UA. באופן דומה גם האנך מ-C ל-VA הוא CM. שימוש בשאלה הקודמת עבור המשולש UVA והמלבן BCUV (שהוא בעצם ריבוע) מסיים את ההוכחה.

3. על הצלעות של משולש ABC נבחרו נקודות: A_1 על BC, B_1 על AC ו-C_1 על AB, כך שהאנכים מ-A, B, ו-C לישרים B_1C_1, A_1C_1 ו-A_1B_1 בהתאמה נפגשים בנקודה אחת. ניקח נקודה A_2 על BC כזאת ש-$A_2B = A_1C$. באופן דומה נגדיר גם B_2 ו-C_2.
א. הוכיחו שהאנכים מ-A_2, B_2 ו-C_2 לישרים BC, AC ו-AB בהתאמה נפגשים בנקודה אחת.
ב. הוכיחו שהאנכים מ-A_1, B_1 ו-C_1 לישרים B_2C_2, A_2C_2 ו-A_2B_2 בהתאמה נפגשים בנקודה אחת.

פתרון. א. דרך אחת היא לרשום את הנוסחה של משפט קרנו עבור משולשים Δ, Δ_1 ומשולשים Δ, Δ_2, כאשר Δ זה המשולש ABC, Δ_1 זה המשולש $A_1B_1C_1$, ו-Δ_2 זה המשולש $A_2B_2C_2$.
התנאי של קרנו עבור זוג משולשים Δ, Δ_1 זהה לתנאי עבור זוג משולשים Δ, Δ_2 (אולי הפוך בסימן, אבל מינוס אפס שווה ל-0).

הוכחה נוספת היא כזאת. כמסקנה ממשפט קרנו, אנו יודעים שהאנכים מ-A_1, B_1 ו-C_1 לצלעות BC, AC ו-AB בהתאמה (כי התנאי סימטרי ביחס לשני המשולשים). נקודת מפגש של 3 אנכים אלה תסומן P. תהא O נקודת מפגש האנכים האמצעים של המשולש

ABC. תהא Q נקודה סימטרית לנקודה P ביחס ל-O, כלומר כזאת ש-O היא אמצע PQ. אז די ברור מהתכונה של קטע אמצעים בטרפז ש-QA_2, QB_2, QC_2 הם האנכים מ-Q לצלעות BC, AC ו-AB בהתאמה, ומכאן הטענה ברורה.

ב. אנחנו נרשום בקיצור $\Delta \perp \Delta_1$ במקום להגיד שהאנכים מהקודקודים של המשולש Δ הראשון לצלעות של משולש Δ_1 נפגשים בנקודה אחת.

נסמן ב-A', B', C' את אמצעי הצלעות BC, AC, AB בהתאמה, והמשולש $A'B'C'$ יסומן Δ'. אנו כבר יודעים כי $\Delta \perp \Delta_1$, ולכן $\Delta' \perp \Delta_1$, כי האנכים מקודקודי Δ_1 לצלעות של Δ נפגשים בנקודה אחת, והאנכים לצלעות של Δ' זה אותם הישרים (הרי $\Delta \| \Delta'$).

הרעיון הוא שהמשולשים $\Delta_1, \Delta', \Delta_2$ הם "סדרה חשבונית", כלומר כל קודקוד של Δ' הוא באמצע הדרך בין Δ_1 לבין Δ_2. האנכים מקודקודי Δ_1 לצלעות של מתאימות Δ_1 נפגשים בנקודה P שהיא נקודת מפגש הגבהים של Δ_1. האנכים מקודקודי Δ' לצלעות של מתאימות Δ_1 נפגשים בנקודה M. אז האנכים מקודקודי Δ_2 לצלעות המתאימות של Δ_1 נפגשים בנקודה Q, כזאת ש-M היא אמצע של PQ.

4. הישרים ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ו-ℓ_4 שמאונכים לצלעות AB, BC, CD ו-DA בהתאמה של המרובע $ABCD$. אין נקודת מפגש משותפת לכל הישרים, אבל הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2 נפגשים בנקודה K, הישרים ℓ_2 ו-ℓ_3 בנקודה N, הישרים ℓ_3 ו-ℓ_4 ב-I, הישרים ℓ_4 ו-ℓ_1 ב-M. הוכיחו כי אם IK מאונך ל-AC, אז MN מאונך ל-BD.

פתרון. זו בעצם גרסה של משפט קרנו על אנכים שנפגשים בנקודה אחת למרובעים.
נזכיר מסקנה ממשפט פיתגורס: ישר ℓ_1 שמאונך ל-AB זה מקום גיאומטרי של נקודות X המקיימות $AX^2 - BX^2 = p$. תנאי דומה יכול להגדיר כל ישר:
ℓ_2 זה מקום גיאומטרי של נקודות X המקיימות $BX^2 - CX^2 = q$,
ℓ_3 זה מקום גיאומטרי של נקודות X המקיימות $CX^2 - DX^2 = r$,
ℓ_4 זה מקום גיאומטרי של נקודות X המקיימות $DX^2 - AX^2 = s$.

הנקודה K מקיימת את התנאי הראשון ואת התנאי השני, כי היא על הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2, וניתן לחבר את שני התנאים האלה שרושמים אותם עבור הנקודה K ונקבל:

$$AK^2 - \cancel{BK^2} + \cancel{BK^2} - CK^2 = p + q$$

הנקודה I מקיימת את התנאי השלישי והרביעי, ומכאן נקבל באופן דומה

$$CX^2 - \cancel{DX^2} + \cancel{DX^2} - AX^2 = r + s$$

על מנת IK יהיה מאונך ל-AC צריך להתקיים

$$p + q = AK^2 - CK^2 = AI^2 - CI^2 = -(r + s)$$

$$p + q + r + s = 0$$

אם נרשום את התנאי לכך ש-MN מאונך ל-BD באופן דומה, נקבל את אותה הנוסחה, לכן שתי הטענות שקולות.

5. במשולש חד-זוויות ABC, מרכז המעגל החוסם הוא O. נסמן ב-'A את אמצע הגובה מ-A (כשגובה זה קטע מהקודקוד עד הבסיס), ונסמן ב-α את הישר שעובר דרך 'A ומקביל לישר OA. באופן דומה נגדיר גם ישרים β ו-γ. הראו שהישרים α, β ו-γ נפגשים בנקודה אחת.

פתרון. נסמן ב-A_1, B_1, C_1 את עקבי האנכים מהקודקודים A, B, C של המשולש ABC. אנו נוכיח כי AO מאונך ל-B_1C_1. אכן, בזוויות המכוונת

$$\sphericalangle(B_1C_1, B_1B) = \sphericalangle(CC_1, CB) = 90^\circ - \sphericalangle(CB, AB)$$

כלומר הזווית בין B_1C_1 לגובה BB_1 שווה לזווית בין OA לצלע AC. אבל גובה מאונך לצלע, לכן B_1C_1 מאונך ל-O.

ובכן, האנכים מנקודות A, B ו-C לצלעות המתאימות של המשולש $A_1B_1C_1$ נפגשים בנקודה O. האנכים מ-A_1, B_1, C_1 לאותן הצלעות נפגשים בנקודה H_1, כי בכל נקודה הגבהים נפגשים בנקודה אחת.

נסמן ב-'M את האמצע של OH_1. האנך מ-'A ל-B_1C_1 עובר דרך 'M כי לפי התכונה של קטע אמצעים לטרפז. אבל האנך הזה מקביל ל-OA, כלומר הוא הישר α. באופן דומה גם הישרים β ו-γ עוברים דרך 'M.

6. במשולש ABC התיכושקפים נפגשים בנקודה K (להזכירכם, תיכושקף במשולש הוא שיקוף של תיכון ביחס לחוצה זווית מאותו הקדקוד). עקבי האנכים מנקודה K לצלעות של משולש ABC הם D, E ו-F. הוכיחו כי K היא נקודת מפגש התיכונים במשולש DEF.

פתרון. תהא M אמצע BC. נקודות U ו-V בן עקבי האנכים מ-M לצלעות AB ו-AC. נקודות 'E ו-'F הם עקבי האנכים מ-E ו-F בהתאמה ל-BC. שאיפתנו היא להוכיח כי D היא האמצע של 'E'F, ואז המשך של KD חוצה את EF.

קל לראות כי $\frac{DE'}{KE} = \frac{MV}{MC}$, כי מדובר בהטלה אנכית באותה זווית, ו-$\frac{MU}{MC} = \frac{DF'}{KF}$.

בנוסף, M היא על תיכון ו-K על תיכושקף, ולכן $\frac{MV}{MU} = \frac{KF}{KE}$. נכפיל את הזהויות האלה:

$$\frac{DE'}{KE} \cdot \frac{MU}{MC} \cdot \frac{MV}{MU} = \frac{MV}{MC} \cdot \frac{DF'}{KF} \cdot \frac{KF}{KE}$$

קיבלנו ש-$DE' = DF'$ כלומר D אמצע של 'E'F כלומר KD הוא תיכון ב-DEF. באופן דומה גם KE ו-KF הם תיכונים ב-DEF.