תרגיל 10

1. מצאו את כל השלשות (p,m,n), כאשר p ראשוני, m ו-n שלמים חיוביים, עבורם $p^m-n^3=27$.

פתרון.
$$p^m=n^3+27$$
$$p^m=(n+3)(n^2-3n+9)$$
קל לראות כי מבין שני הגורמים באגף ימין השני יותר גדול:
$$n+3<n^2-3n+9$$
$$0<n^2-4n+6$$
$$0<(n-2)^2+2$$
אבל שני הגורמים הם חזקות של p, ולכן השני מתחלק בראשון, כלומר n^2-3n+9 מתחלק ב-$n+3$. אבל $n^2-3n+9=(n+3)(n-6)+27$, לכן בעצם 27 מתחלק ב-$n+3$, כלומר $n+3$ הוא 1, 3, 9 או 27. אבל n חיובי שלם, לכן $n+3$ הוא 9 או 27. כלומר n הוא 6 או 24. כלומר
$$p^m=6^3+27 \text{ או } p^m=24^3+27$$
בכל מקרה p^m מתחלק ב-3, ולכן $p=3$. נחלק ב-3^3:
$$3^{m-3}=2^3+1 \text{ או } 3^{m-3}=8^3+1$$
קל לראות כי 9 הוא באמת חזקה של 3, אבל 513 לא. לכן יש תשובה אחת בלבד, והיא
$$n=6, m=5, p=3$$

2. נתונים מספרים שלמים חיוביים m ו-n עבורם $m-n$ אי-זוגי. הראו כי
$$(m+3n)(5m+7n)$$
אינו ריבוע שלם.

פתרון. נניח שהוא כן. ניתן להניח לה"כ כי m ו-n זרים. אכן, אם יש מחלק משותף d ל-m ול-n אז ניתן להחליפם במספרים $\frac{m}{d}$ ו-$\frac{n}{d}$, ואז המכפלה תחולק בריבוע שלם וזה עדיין ריבוע שלם. נסמן
$$A=m+3n \ , \ B=5m+7n$$
אז
$$5A-B=8n$$
$$3B-7A=8m$$
לכן כל מחלק משותף ראשוני של A ושל B הוא או 2, או שהוא גם מחלק משותף של m ושל n. אבל אמרנו ש-m ו-n זרים, לכן כל מחלק ראשוני משותף הוא רק 2. אבל נתון גם כי $m-n$ אי-זוגי, לכן גם $A=m+3n \ , \ B=5m+7n$ אי-זוגיים, כלומר לא מתחלקים ב-2. לכן A ו-B זרים, וגם אי-זוגיים. לכן אם $A\cdot B$ ריבוע שלם, כל אחד מהם ריבוע שלם אי-זוגי. כל ריבוע שלם אי-זוגי הוא 1 מודולו 8, לכן
$$B-A=(5m+7n)-(m+3n)=4(m+n)$$
מתחלק ב-8. כלומר $m+n$ זוגי. אבל $m-n$ אי-זוגי, ולכן זה לא יתכן.

3. הוכיחו כי לכל שני שלמים חיוביים k ו-n, המספר $\left(1^k+2^k+...+n^k\right)(k+1)!$ מתחלק ב-$n(n+1)$.

פתרון. נתחיל במקרה $k=1$. צריך להראות כי

$$n(n+1)\left|(1+2+...+n)\cdot 2\right.$$

$$n(n+1)\left|n(n+1)\right.$$

אבל זה ברור. נסיים באינדוקציה על k: בהנחה שהטענה נכונה לכל $j<k$, נוכיח ל-k.

לפי הבינום של ניוטון

$$(i+1)^k-i^k=\binom{k+1}{1}i^k+\binom{k+1}{2}i^{k-1}+...+\binom{k+1}{k}i+1$$

נסכם זהויות כאלה לכל i החל מ-1 ועד n ונקבל

$$(n+1)^k-1=\binom{k+1}{1}S_k+\binom{k+1}{2}S_{k-1}+...+\binom{k+1}{k}S_1+n$$

כאשר $S_k=\sum_{i=1}^{n}i^k$. לכן

$$(n+1)^k-(n+1)=\binom{k+1}{1}S_k+\binom{k+1}{2}S_{k-1}+...+\binom{k+1}{k}S_1$$

קל לראות כי $n(n+1)\left|(n+1)^k-(n+1)\right.$, זה כמו להגיד ש-$n\left|(n+1)^{k-1}-1\right.$ וזה ברור כי $n+1=1(\mathrm{mod}\,n)$. לכן

$$n(n+1)\left|\binom{k+1}{1}S_k+\binom{k+1}{2}S_{k-1}+...+\binom{k+1}{k}S_1\right.$$

$$n(n+1)\left|k!\cdot\left(\binom{k+1}{1}S_k+\binom{k+1}{2}S_{k-1}+...+\binom{k+1}{k}S_1\right)\right.$$

$$n(n+1)\left|(k+1)!\cdot S_k+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k+1}{2}\cdot k!\cdot S_i\right.$$

אבל לפי הנחת אינדוקציה אפילו $n(n+1)\left|S_i\cdot(i+1)!\right.$ לכל $i<k$, ולכן כמובן גם $n(n+1)\left|S_i\cdot k!\right.$, ולכן $n(n+1)\left|(k+1)!\cdot S_k\right.$, מש"ל.

4. מצאו את כל הפתרונות במספרים טבעיים למשוואה $\left(1+n^k\right)^\ell=1+n^m$, בהנחה ש-$\ell>1$.

פתרון. נניח כי p הוא הגורם הראשוני של מספר ℓ. המספר $\left(1+n^k\right)^\ell-1=n^m$ מתחלק ב-$\left(1+n^k\right)^p-1$, ש ניתן להציגו בצורה

$$pn^k+\frac{p\left(p+1\right)}{2}n^{2k}+r\cdot n^{3k}$$

כלומר, חזקה של n מתחלקת ב-$A=p+\frac{p\left(p+1\right)}{2}n^k+r\cdot n^{2k}$. אם n זר ל-p אז A זר ל-n, ואז לא n^m מתחלק ב-A, שזה לא יתכן. לכן n מתחלק ב-p. לכן

$$\frac{A}{p}=1+\frac{p+1}{2}n^k+\frac{r\cdot n^{2k}}{p}$$

הוא מספר טבעי שגדול מ-1. מצד שני, אם p אי-זוגי, מספר זה הו מסוג $bn+1$, ולכן הוא זר ל-n. לא יתכן ש-n^m מתחלק במספר טבעי שזר לו וגדול מ-1. לכן p לא יכול להיות אי-זוגי, כלומר $p=2$. כלומר, כל מחלק ראשוני של ℓ הוא 2, ולכן $\ell=2^s$.
אז $A=2+3n^k+r\cdot n^{2k}$, וכמו שנאמר כבר זה מחלק של n^m. אבל אם $k>1$ מחלק משותף מרבי של A ו-n^2, וכמובן שמחלק משותף מרבי של A ו-n^m אינו גדול יותר, אבל הוא צריך להיות A. לכן $k=1$.
לכן $A=2+3n+r\cdot n^2$. אז אפשר לשכתב את המשוואה המקורית בצורה יותר פשוטה:

$$\left(1+n\right)^\ell-1=n^m$$

כאשר $\ell=2^s$.

$$\ell n+\nu\cdot n^2=n^m$$

לכן ℓn מתחלק ב-n^2, כלומר ℓ מתחלק ב-n. לכן כלומר גם n הוא חזקה של 2. בכל מקרה, n^m (שגם הוא חזקה של 2) מתחלק ב-$\left(1+n\right)^2-1=n^2+2n=n\left(n+2\right)$. לכן גם n וגם $n+2$ הם חזקות של 2. זה קורה רק כאשר $n=2$.
אם $s\geq 2$ אז $3^\ell-1=n^m$ מתחלק גם ב-$3^4-1=\left(3^2-1\right)\left(3^2+1\right)$, כלומר חזקה של 2 תתחלק גם ב-$3^2+1=10$. לכן $s=0,1$, כלומר מקבלים אחד מהשניים:

$$3^1-1=2^m \text{ או } 3^2-1=2^m$$

בשני המקרים אכן מקבלים חזקה של 2, כלומר יש שתי תשובות:

$$n=2,\ell=1,m=1,$$
$$n=2,\ell=2,m=3.$$

5. מצאו את כל הפתרונות השלמים למשוואה

$$\left(2^{2015}+1\right)^x+2^{2015}=2^y+1.$$

פתרון. אם x שלילי או y שלילי, אז אחד האגפים במשוואה אינו שלם. אם זה קורה בו-זמנית, ניתן להכפיל ב-2^{-y} ושוב רק אגף אחד לא שלם. לכן $x,y\geq 0$.
אם $x=0$ אז $1+2^{2015}=2^y+1$ לכן $y=2015$.
אם $x=1$ אז $1+2^{2015}+2^{2015}=2^y+1$ לכן $y=2016$.

אלה שתי התשובות היחידות. החלק הקשה בשאלה הוא לפסול את המקרה $x>1$, ואנו נציג שתי הוכחות:

הוכחה ראשונה. נסתכל על המשוואה מודולו 9. קל לראות כי $2^{2015}+1$ מתחלק ב-3, וכי $2^6=1\pmod 9$ לפי משפט אוילר, 2010 מתחלק ב-6, הרי לכן

$$\left(2^{2015}+1\right)^x+2^{2015}=0+2^5=5\pmod 9$$

לכן בהכרח $2^y=4\pmod 9$, כלומר $y=6k+2$.

כעת נסתכל על המשוואה מודולו 13. מכיוון ש-2016 מתחלק ב-12, לפי משפט פרמה

$$2^{2015}=2^{-1}=14/2=7\pmod{13}$$

כמו כן $2^6=8^2=(-5)^2=25=-1\pmod{13}$, ולכן נקבל

$$8^x+7=\pm 4+1\pmod{13}$$

אבל חזקות של 8 מודולו 13 הן רק ± 1 או ± 8. לכן באגף שמאל נוכל לקבל רק 6, 8, 12 או 2, ובאגף ימין נקבל רק 5 או 10, כלומר בשום אופן לא נקבל שוויון.

הוכחה שנייה. נפתח סוגריים ונקזז 1:

$$x\cdot 2^{2015}+\sum_{k=2}^{x}\binom{x}{k}2^{2015\cdot k}+2^{2015}=2^y$$

האגף השמאלי מתחלק ב-2^{2015}, לכן גם הימני, לכן $y>2015$ ולכן

$$1+x+\sum_{k=2}^{x}\binom{x}{k}2^{2015(k-1)}=2^{y-2015}.$$

באגף שמאל הכול חוץ מ-$x+1$ מתחלק ב-2^{2015}, ואגף ימין הוא חזקת 2 גדולה מ-2^{2015}, לכן גם $x+1$ מתחלק ב-2^{2015}. לכן $x+1$ מתחלק ב-16, כלומר ניתן לכתוב $x=16k-1$. כעת נסתכל על המשוואה המקורית מודולו 17. חזקות של 2 מודולו 17 הם 1, 2, 4, 8, 1–, 2–, 4– ו-8– במחזורים של 8, ולכן $2^{2015}=-8\pmod{17}$, ואז

$$(-7)^{16k-1}-8=2^y+1\pmod{17}$$

$$(-7)^{-1}-8=2^y+1\pmod{17}$$

נשים לב כי 34 מתחלק ב-17, אבד $7\cdot 5=35$, ולכן $\frac{1}{7}=5\pmod{17}$. לכן

$$4=-13=-5-8=2^y+1\pmod{17}$$

$$3=2^y\pmod{17}$$

אבל 3 הוא לא ברשימה של חזקות 2 שרשמנו.

6. בוחרים מספר טבעי k ומגדירים שתי סדרום מספרים $\{a_n\}$ ו-$\{b_n\}$:

$$a_1=k,\quad a_2=k,\quad a_{n+2}=a_{n+1}a_n,$$

$$b_1=1,\quad b_2=k,\quad b_{n+2}=\frac{b_{n+1}^3+1}{b_n},$$

הראו כי לכל n טבעי, $a_{2n}b_{n+3}$ הוא שלם.

פתרון. נגדיר סדרת פיבונצ'י: באמצעות $f_1 = f_2 = 1$, ונוסחת נסיגה $f_{n+2} = f_{n+1} + f_{n+1}$. באמצעות נוסחת הנסיגה ניתן להמשיך את הסדרה גם לאחור: $f_0 = 0$, $f_{-1} = 1$, $f_{-2} = -1$ וכו'. קל לראות כי $a_n = k^{f_n}$ במצבים בהם היא הוגדרה, ואפשר להמשיך את הסדרה לאחור כך שתתקיים אותה נוסחה, ואותה נוסחת נסיגה. נגדיר סדרה נוספת:

$$c_n = a_{2n} b_{n+3} = k^{f_{2n}} b_{n+3}$$

מבקשים להראות כי לכל $n > 0$, c_n שלם. אבל בעצם ניתן c_n מוגדרת לכל $n \geq -2$.
נחשב מספר ערכים של b_n

$$b_1 = 1,\ b_2 = k,\ b_3 = k^3 + 1,\ b_4 = \frac{b_3^3 + 1}{k}$$

נחשב מספר c_n

$$c_{-1} = a_{-2} b_2 = k^{-1} \cdot k = 1$$

$$c_0 = a_0 b_3 = k^3 + 1$$

$$c_1 = a_2 b_4 = k^1 \cdot \frac{b_3^3 + 1}{k} = b_3^3 + 1 = c_0^3 + 1$$

$$c_2 = a_4 b_5 = k^3 \cdot \frac{b_4^3 + 1}{b_3} = k^3 \cdot \frac{\left(\frac{b_3^3 + 1}{k}\right)^3 + 1}{b_3} = \frac{\left(b_3^3 + 1\right)^3 + k^3}{b_3} =$$

$$= b_3^8 + 3b_3^5 + 3b_3^2 + \frac{k^3 + 1}{b_3} = b_3^8 + 3b_3^5 + 3b_3^2 + 1$$

כלומר עבור $n = -1, 0, 1, 2$ המספרים c_n טבעיים.

נניח כי c_n מתחלק ב-p^m אבל לא ב-p^{m+1} .

נוכיח זהות על מספרי פיבונצ':

$$\boxed{f_n + f_{n+4} = 3 f_{n+2}} \qquad (*)$$

אכן, נעביר אגפים: הזהות שקולה ל-$f_{n+4} - f_{n+2} = f_{n+2} + \left(f_{n+2} - f_n\right)$ כלומר $f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1}$, וזה נכון.

את נוסחת הנסיגה של b_n ניתן לכתוב כך: $b_n b_{n+2} = b_{n+1}^3 + 1$. זה גורר זהות על c_n:

$$\frac{c_n \cdot c_{n+2}}{k^{f_{2n}} \cdot k^{f_{2n+4}}} = \left(\frac{c_{n+1}}{k^{f_{2n+2}}}\right)^3 + 1$$

המכנה בשני האגפים הוא זהה עקב $(*)$, ולכן

$$\boxed{c_n \cdot c_{n+2} = c_{n+1}^3 + k^{3 \cdot f_{2n+2}}} \qquad (**)$$

אנחנו רוצים להראות שמספרים c_n טבעיים. נניח באינדוקציה שהוכחנו עד $c_{\nu+1}$ כולל. כלומר בעצם צריך להראות ש- $c_{\nu+1}^3 + k^{3\cdot f_{2\nu+2}}$ מתחלק ב- c_ν.

קודם נוכיח, כי k זר ל- c_m. נניח כי ל- k ול- c_m יש מחלק משותף p. אז קל לראות כי $c_m = 1 \pmod p$, ובאינדוקציה לפי $(**)$, מקבלים $c_0 = c_{-1} = 1 \pmod p$ לכל m. לכן k זר ל- c_m.

מכאן נסיק, כי c_m זר ל- c_{m+1} לכל $m \le N$. לפי $(**)$ (כשמציבים $n = m$ או $n = m-1$ אז רואים, שאם יש מחלק ראשוני משותף של c_m ו- c_{m+1} הוא מחלק גם של k ולכן גם של k, אבל קודם הוכחנו כי k זר ל- c_m.

$$c_{\nu+2} = \frac{c_{\nu+1}^3 + k^{3 f_{2\nu+2}}}{c_\nu} = \frac{\left(c_\nu^3 + k^{3 f_{2\nu}}\right)^3 + c_{\nu-1}^3 \cdot k^{3 f_{2\nu+2}}}{c_{\nu-1}^3 c_\nu} =$$

$$= \frac{c_\nu \cdot D + k^{9 f_{2\nu}} + c_{N-1}^3 \cdot k^{3 f_{2\nu+2}}}{c_{\nu-1}^3 c_\nu} = \frac{1}{c_{\nu-1}^3}\left(D + k^{3 f_{2\nu+2}} \cdot \frac{k^{3\cdot(3 f_{2\nu} - f_{2\nu+2})} + c_{\nu-1}^3}{c_\nu} \right) =$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{c_{\nu-1}^3}\left(D + k^{3 f_{2\nu+2}} \cdot \frac{k^{3\cdot f_{2\nu-2}} + c_{\nu-1}^3}{c_\nu} \right) \overset{(**)}{=} \frac{1}{c_{\nu-1}^3}\left(D + k^{3 f_{2\nu+2}} \cdot c_{\nu-2} \right) = \frac{D + k^{3 f_{2\nu+2}} c_{\nu-2}}{c_{\nu-1}^3}$$

כאשר גם D שלם. כלומר הצלחנו להציג את $c_{\nu+2}$ כשבר עם מכנה c_ν וגם כשבר עם מכנה $c_{\nu-1}^3$, כאשר אלה מספרים זרים. לאחר צמצום של השבר, המכנה הוא מחלק גם של c_ν וגם של $c_{\nu-1}^3$, כלומר 1. לכן $c_{\nu+2}$ מספר שלם.