תרגיל 10

1. מצאו את כל השלשות (p,m,n), כאשר p ראשוני, m ו-n שלמים חיוביים, עבורם $p^m - n^3 = 27$.

2. נתונים מספרים שלמים חיוביים m ו-n עבורם $m-n$ אי-זוגי. הראו כי $(m+3n)(5m+7n)$ אינו ריבוע שלם.

3. הוכיחו כי לכל שני שלמים חיוביים k ו-n, המספר $(1^k + 2^k + ... + n^k)(k+1)!$ מתחלק ב-$n(n+1)$.

4. מצאו את כל הפתרונות במספרים טבעיים למשוואה $(1+n^k)^\ell = 1+n^m$, בהנחה ש-$\ell > 1$.

5. מצאו את כל הפתרונות השלמים למשוואה
$$\left(2^{2015}+1\right)^x + 2^{2015} = 2^y + 1 .$$

6. בוחרים מספר טבעי k ומגדירים שתי סדרות מספרים $\{a_n\}$ ו-$\{b_n\}$:
$$a_1 = k, \quad a_2 = k, \quad a_{n+2} = a_{n+1}a_n,$$
$$b_1 = 1, \quad b_2 = k, \quad b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^3 + 1}{b_n},$$
הראו כי לכל n טבעי, $a_{2n}b_{n+3}$ הוא שלם.