21/2/2016 **מחנה סתיו** י"ב באדר א' תשע"ו

קבוצת ירדן

1. במרובע ABCD האלכסונים AC ו-BD נפגשים בנקודה X.
הוכיחו כי אם $S_{ABX}=\sqrt[3]{S_{BCX}\cdot S_{CDX}\cdot S_{DAX}}$ אז ABCD הוא טרפז.

2. צורה מרחבית שנקראת **פינה** מורכבת מ-3 קוביות יחידה, כך ששתי פאות לא נגדיות של אחת הקוביות מודבקות לפאות של קוביות אחרות. עבור אילו ערכים של n, ניתן להרכיב קוביה $n\times n\times n$ מפינות?

3. מספרים ממשיים a, b ו-c מקיימים $a+b+c=0$. הוכיחו כי

$$\frac{2a^3}{2^a+1}+\frac{2b^3}{2^b+1}+\frac{2c^3}{2^c+1}\le 3abc$$

4. ביקום מקביל חיים 30 אֶלפים בני אלמוות שנוצרו באותו יום בו נוצר היקום. חברות הוא יחס הדדי אצל האלפים. בכל שנה מתרחש אחד מהשניים: או שאלף שהיו לו פחות מ-10 חברים מוצא חבר חדש, או ששני אלפים שיש לכל אחד מהם יותר מ-10 חברים מפסיקים להיות חברים.
א. האם יתכן שיקום זה יתקיים 1000 שנים?
ב. מהו המספר הגדול ביותר של שנים שהיקום יוכל להתקיים?

בהצלחה!

21/2/2016 **מחנה סתיו** י"ב באדר א' תשע"ו

קבוצת רותם

1. מספרים ממשיים a, b ו-c מקיימים $a+b+c=0$. הוכיחו כי

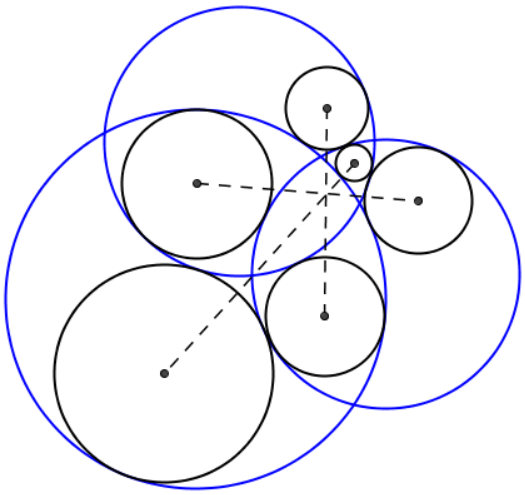
$$\frac{2a^3}{2^a+1}+\frac{2b^3}{2^b+1}+\frac{2c^3}{2^c+1}\le 3abc.$$

2. ביקום מקביל חיים 30 אֶלפים בני אלמוות שנוצרו באותו יום בו נוצר היקום. חברות הוא יחס הדדי אצל האלפים. בכל שנה מתרחש אחד מהשניים: או שאלף שהיו לו פחות מ-10 חברים מוצא חבר חדש, או ששני אלפים שיש לכל אחד מהם יותר מ-10 חברים מפסיקים להיות חברים.

א. האם יתכן שיקום זה יתקיים 1000 שנים?

ב. מהו המספר הגדול ביותר של שנים שהיקום יוכל להתקיים?

3. בתמונה צוירו מעגלים כחולים α,β,γ שנחתכים בזוגות. מעגל α_1 משיק מבפנים למעגלים β ו-γ ומבחוץ למעגל α. מעגל α_2 משיק מבחוץ למעגלים β ו-γ ומבפנים למעגל α. הישר שמחבר את המרכזים של המעגלים α_1 ו-α_2 יסומן ℓ_α. באופן דומה מוגדרים הישרים ℓ_β ו-ℓ_γ. הוכיחו כי הישרים ℓ_α, ℓ_β ו-ℓ_γ נפגשים בנקודה אחת.



בהצלחה!

22/2/2016 **מחנה סתיו** י"ג באדר א' תשע"ו

קבוצת ירדן

1. בבית משוגעים סגור גרים 30 אנשים, חלקם רופאים וחלקם מטופלים. השפויים מביניהם תמיד אומרים את האמת, והמשוגעים מביניהם תמיד משקרים. (בן אדם לא שפוי הוא משוגע, ולהיפך; לא כל המטופלים בהכרח משוגעים ולא כל הרופאים בהכרח שפויים). בכל מטופל מטפל רופא אחד בדיוק (וכמובן, אף רופא אינו מטופל ע"י רופא אחר). יום אחד במסדר הסתדרו כל 30 האנשים במעגל, וכל אחד מהם אמר שמשמאלו עומד הרופא המטפל שלו. מה הכמות המינימלית של משוגעים בבית משוגעים הזה, וכמה רופאים יש במקרה הזה?

2. עבור אילו ערכים של n טבעי קיימים מספרים טבעיים שונים בזוגות $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n}$ המקיימים $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_5}{a_6} + ... + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = 1$, כך שכל שבר בסכום זה הוא מצומצם.

3. לטירה קסומה יש כניסה אחת בלבד. הטירה מורכבת מחדרים שלאחד מהם יש דלת אחת בלבד, ובחדר זה נמצאת הנסיכה. בכל אחד מהחדרים האחרים יש בדיוק 4 דלתות (אחת בכל קיר). הדלתות הן קסומות – כל דלת מחברת בין 2 חדרים שאינם בהכרח סמוכים. לואיג'י נכנס לטירה ובכל חדר שהוא נכנס אליו הוא ממשיך ללכת לדלת הנגדית. האם הוא ימצא את הנסיכה בוודאות?

4. מחומש משוכלל ABCDE חסום במעגל ω. על הקשת CD של ω בוחרים נקודה T. נקודת חיתוך של TA ו-BD תסומן X, נקודת חיתוך של TB ו-CD תסומן Y. הוכיחו כי $DX = DY$.

בהצלחה!

22/2/2016 **מחנה סתיו** י"ג באדר א' תשע"ו

קבוצת רותם

1. יהא ABC משולש חד-זוויות עם מפגש גבהים H. תהא D הנקודה עבורה המרובע $HABD$ הינו מקבילית (עם $AB \parallel HD$ ו-$AH \parallel BD$). תהא E הנקודה על הישר DH עבורה מתקיים כי הישר AC עובר באמצע הקטע HE. תהא F נקודת החיתוך השנייה של הישר AC עם המעגל החוסם של המשולש DCE.

הוכיחו כי $EF = AH$.

2. סדרת המספרים הממשיים החיוביים $a_1, a_2, \ldots$ מקיימת

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}$$

לכל שלם חיובי k. הוכיחו כי

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n$$

לכל $n \geq 2$.

3. תהא A קבוצה של מספרים שלמים חיוביים. שלם חיובי n נקרא **מיוחד** אם קיימת ויחידה תת-קבוצה $\mathcal{B}$ של A עם שתי התכונות הבאות:

(i) מספר האיברים ב-$\mathcal{B}$ הוא אי-זוגי;

(ii) סכום איברי $\mathcal{B}$ הוא n.

הוכיחו כי קיימים אינסוף שלמים חיוביים שאינם מיוחדים.

(אם m הוא האיבר היחיד ב-$\mathcal{B}$, סכום איברי $\mathcal{B}$ הוא m.)

בהצלחה!

23/2/2016 **מחנה סתיו** י"ד באדר א' תשע"ו

תחרות קבוצתית

1. על הלוח רשומות 64 אחדות. בכל מהלך, מוצאים על הלוח מספר מסוים N שרשום גם בעוד מקום על הלוח, ומחליפים אותו ב-$N+1$ או ב-$2N$. המשחק מסתיים כאשר אף מספר לא מופיע פעמיים. מצאו את כמות המהלכים המינימאלית והמקסימאלית במשחק.

2. מצאו את כמות הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $f\left(f\left(f\left(n\right)\right)\right)=f\left(f\left(n\right)\right)$ לכל $n\in\{1,2,3,4,5\}$.

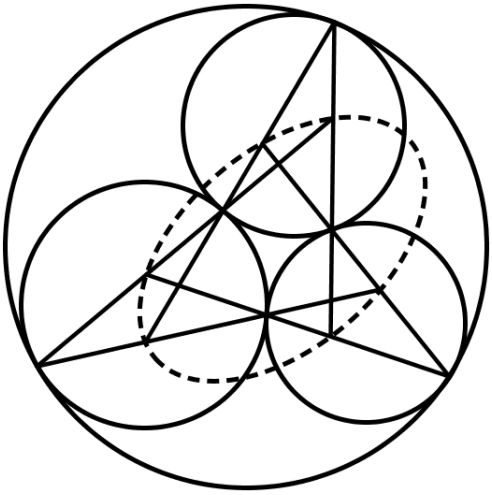
3. על הלוח היו רשומים 3 מספרים שונים a,b,c. יעל חישבה את המספרים
$$a+3b,b+3a,b+3c,c+3b,c+3a,a+3c$$
ורשמה את התשובות במחברת שלה בסדר אקראי. עמוס חישב את המספרים
$$a+2b,b+2a,b+2c,c+2b,c+2a,a+2c$$
ורשם אותם במחברת שלו בסדר אקראי. האם ניתן לדעת את המספרים a,b,c
א. על סמך המחברת של יעל?
ב. על סמך המחברת של עמוס?

4. מספרים ממשיים a, b, c ו-d מקיימים מערכת משוואות
$$\begin{cases}\left(a+b\right)\left(c+d\right)=5\\\left(a+c\right)\left(b+d\right)=8\\\left(a+d\right)\left(b+c\right)=9\end{cases}$$
מצאו את הערך המינימאלי האפשרי של $a^2+b^2+c^2+d^2$.

5. נתון פאון (גוף מעץ מלא שחסום על ידי פאות מישוריות), שאינו קמור. הוכיחו שיש לפאון זה חתך מישורי עם שטח חיובי שאינו מצולע (אבל יכול להיות מצולע עם חור, או איחוד זר של יותר ממצולע אחד).

6. במרחב נתונים שני כדורים K ו-Q, ושני מישורים שמשיקים לשניהם ρ ו-π. הכדורים נמצאים באותו צד של ρ אבל בצדדים שונים של π. נקודות ההשקה של π עם K ו-Q הן A ו-B. נקודות ההשקה של ρ עם K ו-Q הן S ו-T. הקטע ST חותך את π בנקודה L. המישורים ρ ו-π נחתכים בישר ℓ. הראו שהישר ℓ יוצר זוויות שוות עם LA ו-LB.

7. עמרי בוחר תמורה על 76 איברים, ואמוץ מנסה לנחש אותה. בכל מהלך אמוץ מציג לעמרי תמורה כלשהי על אותם 76 איברים לפי בחירתו, ועמרי מספר לו בדיוק איזה מספרים בתמורה שלו עומדים על המקומות הנכונים. כמה מהלכים אמוץ צריך על מנת לשחזר את התמורה של עמרי?



8. מעגלים α,β,γ משיקים זה לזה באופן חיצוני: המעגלים α ו-β משיקים בנקודה C, המעגלים β ו-γ בנקודה A, המעגלים γ ו-α בנקודה B. בנוסף, α,β,γ משיקים מבפנים למעגל ω בנקודות A',B',C'. הישרים CA' ו-AB' נפגשים בנקודה X_1, ובאופן סימטרי מגדירים נקודות X_2,X_3,X_4,X_5,X_6. הראו כי שש הנקודות X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6 נמצאות על שניונית אחת.

9. הוכיחו כי לכל a, b ו-c ממשיים מתקיים

$$4\left(a^6+b^6+c^6\right)+5abc\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\left(ab+bc+ca\right)^3$$

בהצלחה!

24/2/2016 **מחנה סתיו** ט"ו באדר א' תשע"ו

קבוצת ירדן

1. עבור אילו ערכים של n קיים מצולע בעל n צלעות שחוסם מעגל ושהינו שווה צלעות, אבל איננו משוכלל?

2. מטילים קוביה הוגנת בין שני מישורים, שמשופעים ב- 45° בכיוונים שונים. לאחר הזריקה הקוביה נופלת כך ששתי פאות שלה פונות כלפי מעלה. תוצאת הזריקה היא סכום המספרים (הממשיים) הכתובים על פאות אלו.
האם ניתן לבחור את המספרים הכתובים על הפאות, כך שהתוצאה תמיד תהיה 1, 2, 3, 4, 5 או 6, והסיכוי לקבל כל אחת מהאפשרויות האלו יהיה שוצווה?

3. חשבו את $\sum_{n=0}^{63}\sum_{m=0}^{63}\frac{\max(m,n)}{\left(\sqrt{m+1}+\sqrt{m}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$.

4. במישור אוקלידי נמצאים 5776 חרגולים נקודתיים. בהתחלה כולם נמצאים בשדה עגול, שמרכזו בנקודה A ורדיוסו 10 מטרים, ואף שלושה לא נמצאים על ישר אחד. הם שואפים להגיע לדשא הירוק יותר של השכן – שגם הוא בצורת עיגול, אשר מרכזו בנקודה B ורדיוסו 1 מטר. המרחק בין הנקודות A ו-B הוא 100 מטרים. בכל מהלך חרגול אחד קופץ מעל חרגול אחר, כך שהחרגול האחר יהיה באמצע הקטע שמחבר את נקודת ההתחלה של הקפיצה עם נקודת היעד שלה. האם החרגולים יכולים להשיג את מטרתם?

בהצלחה!

24/2/2016 **מחנה סתיו** ט"ו באדר א' תשע"ו

קבוצת רותם

1. דרך המשי משתרעת מהיאנג קאי לצ'ונג מונג, ועליה ממוקמות $N \geq 1$ ערים. מחוץ לכל עיר מוצבים שני פילים, אחד מימין שפונה ימינה, ואחד משמאל שפונה שמאלה. הגדלים של כל $2N$ הפילים שונים זה מזה. מותר לבחור פיל אחד ולפקוד עליו להתחיל לדהור קדימה. הפיל יעיף מהדרך כל פיל שקטן ממנו וגם כל פיל שעומד עם הגב אליו, יחריב כל עיר דרכה יעבור, וייעצר רק בהתנגשות חזיתית עם פיל שגדול ממנו.

עיר נקראת בטוחה אם אף פיל לא יכול להחריב אותה. הוכיחו כי בדיוק עיר אחת היא בטוחה (בהנחה שרק פיל אחד עלול לדהור).

2. יהא ABC משולש חד-זוויות, M אמצע AC. מעגל ω שעובר דרך B ו-M פוגש את הצלעות AB ו-BC בנקודות P ו-Q בהתאמה. תהא T נקודה עבורה BPTQ מקבילית. נניח בנוסף כי T נמצאת על המעגל החוסם של ABC. מצאו את כל הערכים האפשריים של $\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{BM}}$.

3. נסמן ב-$\mathbb{Z}_{>0}$ את קבוצת השלמים החיוביים. נתונה פונקציה $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$. לכל $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$ נסמן $f^n(m)=\underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(m)\ldots))$. נתון כי מתקיימות שתי התכונות הבאות:

(i) לכל $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$ גם $\dfrac{f^n(m)-m}{n}\in\mathbb{Z}_{>0}$,

(ii) הקבוצה $\mathbb{Z}_{>0}\setminus\left\{f(n)\middle|n\in\mathbb{Z}_{>0}\right\}$ היא סופית.

(כלומר כל מספר ב-$\mathbb{Z}_{>0}$, פרט למספר סופי של ערכים, הוא $f(n)$ עבור n מסוים.)
הוכיחו כי הסדרה $f(1)-1,\ f(2)-2,\ f(3)-3,\ldots$ היא מחזורית.

בהצלחה!