10. עבור מספרים חיוביים

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+a}\geq\frac{a+b+c+d+e}{a+b+c+d+e-3\cdot\sqrt[5]{abcde}}$$

למה. $abc=1$, מספרים חיוביים, אז $\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+ca}\geq\frac{3}{2}$.

ניתן להניח כי $a=\frac{y}{x}$. אז

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+ab}=\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+xz}=\sum_{cyc}\frac{x^4}{x^2y^2+x^3z}\geq\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{\sum_{cyc}\left(x^2y^2+x^3z\right)}\geq\frac{3}{2}$$

$$\sum_{cyc}\frac{bc}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

$$\sum_{cyc}\frac{ac}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

$$\sum_{cyc}\left(\frac{ac}{a+b}+a\right)\geq a+b+c+\frac{3}{2}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a\left(a+b+c\right)}{a+b}\geq a+b+c+\frac{3}{2}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a}{a+b}\geq1+\frac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{2\left(a+b+c\right)}$$

$$\sum_{cyc}\frac{2a}{a+b}\geq2+\frac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a-b}{a+b}\geq\frac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}-1$$

$$\sum_{cyc}\frac{b-a}{b+a}\leq1-\frac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$$

נוכיח כי

$$1+\frac{15\cdot\sqrt[5]{abcde}}{2\left(a+b+c+d+e\right)}\geq\frac{a+b+c+d+e}{a+b+c+d+e-3\cdot\sqrt[5]{abcde}}$$

$$1+\frac{15G}{10A}\geq\frac{5A}{5A-3G}$$

$$\frac{3G}{2A}\geq\frac{3G}{5A-3G}$$

לכן מספיק להראות

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+a}\geq1+\frac{15\cdot\sqrt[5]{abcde}}{2\left(a+b+c+d+e\right)}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a-b}{a+b}\geq\frac{15\cdot\sqrt[5]{abcde}}{a+b+c+d+e}-3$$

$$\sum_{cyc}\frac{b-a}{b+a}\leq3\left(1-\frac{5\cdot\sqrt[5]{abcde}}{a+b+c+d+e}\right)$$

$$\sum_{cyc}\frac{b-a}{b+a}=\left(\frac{b-a}{b+a}+\frac{c-b}{c+b}+\frac{a-c}{a+c}\right)+$$
$$+\left(\frac{c-a}{c+a}+\frac{d-c}{d+c}+\frac{a-d}{a+d}\right)+\left(\frac{d-a}{a+a}+\frac{e-d}{e+d}+\frac{a-e}{a+e}\right)$$
$$5\sum_{cyc}\frac{b-a}{b+a}=\sum_{cyc}\left(\frac{b-a}{b+a}+\frac{c-b}{c+b}+\frac{a-c}{a+c}\right)+$$
$$+\sum_{cyc}\left(\frac{c-a}{c+a}+\frac{d-c}{d+c}+\frac{a-d}{a+d}\right)+\sum_{cyc}\left(\frac{d-a}{a+a}+\frac{e-d}{e+d}+\frac{a-e}{a+e}\right)\leq$$
$$\leq\sum_{cyc}\left(1-\frac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)+\sum_{cyc}\left(1-\frac{3\cdot\sqrt[3]{acd}}{a+c+d}\right)+\sum_{cyc}\left(1-\frac{3\cdot\sqrt[3]{ade}}{a+d+e}\right)\overset{?}{\leq}$$
$$\overset{?}{\leq}15\left(1-\frac{5\cdot\sqrt[5]{abcde}}{a+b+c+d+e}\right)$$

$$\sum_{cyc}\frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}+\sum_{cyc}\frac{\sqrt[3]{acd}}{a+c+d}+\sum_{cyc}\frac{\sqrt[3]{ade}}{a+d+e}\geq\frac{25\cdot\sqrt[5]{abcde}}{a+b+c+d+e}$$