שחמט, דובים ושמורות

1. מלוח שח הוציאו שתי משבצות באופן אקראי. מה הסיכוי שניתן לרצף את יתר המשבצות באמצעות אבני דומינו 1×2 ?

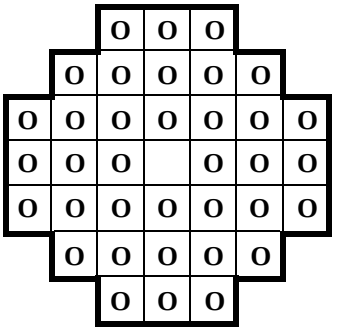
2. על הלוח רשומים מספרים 1, 2, 3, ... , 100. בכל מהלך מוחקים שני מספרים כלשהם באופן אקראי a,b ומחליפים אותם ב-$a+b+ab$. הוכיחו שהמספר שיישאר בסוף לא תלוי בבחירות של המספרים.

3. בכל משבצת של לוח 9×9 נמצא דוב. כל דוב מחליט לעבור למשבצת סמוכה על האלכסון. הראו שאם כל דוב יעשה צעד כזה יישארו לפחות 9 משבצות ריקות.

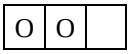
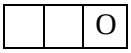
4. באי חיות 17 זיקיות אפורות, 15 זיקיות ירוקות ו-13 זיקיות חומות. כאשר שתי זיקיות מצבע שונה נפגשות, שתיהן מחליפות צבע לצבע השלישי (למשל אם זיקית אפורה וזיקית חומה נפגשו שתיהן הופכות להיות ירוקות וכו'). האם יכול לקרות שכעבור כמה זמן כל הזיקיות באי יהיו באותו צבע?

5. בכל נקודה של השריג יש מאורת דובים. ב-n מאורות חיים דובים. בכל יום צייד הולך לאחת המאורות וצד את הדוב שגר בה. הדובים מ-8 המאורות הסמוכות שומעים וברחים. הוכיחו כי הצייד יכול לצוד לפחות $n/4$ דובים.

6. א. כמה מלבנים בגודל 1×4 אפשר לחתוך מריבוע 10×10?
ב. כמה מלבנים בגודל 1×5 אפשר לחתוך מריבוע 8×8?



7. נתון משחק (התמונה בציור). בכל צעד של המשחק חייל (O) יכול לקפוץ מעל חייל אחר למשבצת ריקה במאוזן או במאונך, החייל שמעליו קפצו מורד מהלוח.

לדוגמא  הופך ל- 

מהו המספר המינימלי של חיילים שאפשר להשאיר בסוף המשחק?

8. אותו משחק אבל על לוח אינסופי כאשר המצב ההתחלתי הוא שהחיילים ממלאים ריבוע $N\times N$. מהו מספר החיילים המינימלי שאפשר להשאיר לכל N?

9. האם אפשר לכסות שלוש פאות בעלות קודקוד משותף של קוביה $4\times 4\times 4$ באמצעות פסים עשויים נייר 1×3 ללא חפיפות?

10. נתונות שתי רשימות של מספרים: האחת 1, 6, 11, ..., 96 והשנייה 4, 9, 14, ..., 99. בכל תור מוחקים שני מספרים מאחת הרשימות ורושמים את שליש הסכום שלהם (שאינו בהכרח שלם) ברשימה השנייה. ממשיכים בתהליך כל עוד אפשר.
א. הוכח שבסוף התהליך יישאר בדיוק מספר אחד בכל אחת מהרשימות.
ב. הוכח ששני המספרים האלה שונים.

בהצלחה!