אי-שוויונים

מחנה פברואר תשע"ו

1. עבור מספרים אי-שליליים x,y,z המקיימים $x^3+2y^3+6z^3=1$, מצאו את הערך המקסימלי של $2x+y+3z$.

2. עבור מספרים אי-שליליים a,b,c המקיימים $a+b+c=3$, הוכיחו כי

$$\sqrt{2a+3}+\sqrt{2b+3}+\sqrt{2c+3}\geq 6$$

3. עבור מספרים חיוביים a,b,c המקיימים $abc\leq 1$, הוכיחו כי

$$\frac{a+1}{ab+1}+\frac{b+1}{bc+1}+\frac{c+1}{ca+1}\geq 3$$

4. עבור מספרים ממשיים a,b,c המקיימים $ab+ac+bc\neq 0$, הוכיחו כי

$$\frac{ab}{a^2+3b^2}+\frac{bc}{b^2+3c^2}+\frac{ca}{c^2+3a^2}\leq\frac{3}{4}$$

5. עבור מספרים ממשיים a,b,c כלשהם, הוכיחו כי

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\geq 2\left(a-b\right)^2\left(b-c\right)^2\left(c-a\right)^2$$

6. עבור מספרים ממשיים a,b,c המקיימים $a\geq bc^2$,$b\geq ca^2$,$c\geq ab^2$, מצאו את הערך המקסימלי של $abc\left(a-bc^2\right)\left(b-ca^2\right)\left(c-ab^2\right)$.

7. לכל המשולשים חדי-זווית הוכיחו כי $m_a+m_b+m_c\geq 4R$ (כלומר סכום אורכי התיכונים גדול או שווה לפעמיים קוטר המעגל הגדול).

8. נתון מרובע ABCD. נקודה E היא אמצע של AC, ונקודה F היא אמצע של BD. הוכיחו כי $AB+BC+CD+DA\geq AC+BD+2EF$.

9. עבור מספרים אי-שליליים a,b,c, הוכיחו כי

$$a\sqrt{a^2+bc}+b\sqrt{b^2+ac}+c\sqrt{c^2+ab}\geq\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)}$$