אי-שוויונים (פסח תשע"ו)

1. יהי $a \ge b \ge c \ge 0$ כאלה ש-$a^2+b^2+c^2+abc=4$
א. הוכיחו כי $a \ge 1, c \le 1$.
ב. הוכיחו כי $a+b \ge 2$.
ג. הוכיחו כי $a+bc \le 2$.

2. יהי $a^2+b^2+c^2+abc=4$ כך ש-$a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$
א. הוכיחו כי $a+b+c \le 3$.
ב. הוכיחו כי $ab+ac+bc \le 2+abc$.
ג. הוכיחו כי

$$ab+ac+bc+\frac{1}{8}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \le 2+\frac{1}{2}(a+b+c-1)abc$$

.

3. a, b ו-c מספרים טבעיים. הוכיחו כי

$$\left[\frac{a+b}{c}\right]+\left[\frac{a+c}{b}\right]+\left[\frac{b+c}{a}\right] \ge 4$$

4. ידוע כי $z^2-xy<0$, $y^2-xz>0$ ו-$x^2-yz>0$, כאשר $\{x,y,z\} \subset \mathbb{R}$.

הוכיחו כי $\frac{1}{x^2-yz}+\frac{1}{y^2-xz}+\frac{1}{z^2-xy} \ge 0$.

5. ידוע כי $xy+xz+yz \ne 0$, כאשר $\{x,y,z\} \subset [0,1]$. הוכח כי

$$\sqrt{\frac{x}{4x+yz}}+\sqrt{\frac{y}{4y+xz}}+\sqrt{\frac{z}{4z+xy}} \ge 1$$

.

2. יהי $a^2+b^2+c^2+abc=4$ כך ש-$a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$

ג. הוכיחו כי

$$ab+ac+bc+\frac{1}{8}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\le 2+\frac{1}{2}(a+b+c-1)abc.$$

פתרון. עקב סימטריה לה"כ $a\ge b\ge c$. מכאן קל לראות כי $c\le 1$. נכפיל ב-2:

$$2(ab+ac+bc)+\frac{1}{4}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\le 4-abc+(a+b+c)abc$$

$$2(ab+ac+bc)+\frac{1}{4}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\le a^2+b^2+c^2+(a+b+c)abc$$

$$2(ac+bc)+\frac{1}{4}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\le (a-b)^2+c^2+(a+b+c)abc$$

$$8(ac+bc)\le 4(a-b)^2-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2+4c^2+4(a+b+c)abc$$

$$8(ac+bc)\le$$
$$(a-b)^2(2-(b-c)(a-c))(2+(b-c)(a-c))+4c^2+4(a+b+c)abc$$

נשים לב כי $4=a^2+b^2+c^2+abc=(a-b)^2+2ab+abc+c^2$

לכן $4-c^2=(a-b)^2+ab(2+c)$. נחלק ב-$(2+c)$ ונקבל $2-c-ab=\frac{(a-b)^2}{2+c}$

מכאן $2-c-ab\ge 0$.

$$2-(b-c)(a-c)=2-ab-c^2+ac+bc\ge 2-ab-c+c(a+b)\ge c(a+b)$$

לכן מספיק להוכיח כי

$$8(ac+bc)\le (a-b)^2c(a+b)\cdot 2+4c^2+4(a+b+c)abc$$

בשביל זה מספיק להוכיח

$$4(a+b)\le (a-b)^2(a+b)+2c+2(a+b+c)ab$$

$$4(a+b)\le \left(a^2-\cancel{2ab}+b^2+\cancel{2ab}\right)(a+b)+2c+2cab$$

$$\left(4-a^2-b^2\right)\left(a+b\right)\le 2c+2cab$$

$$\left(c^2+abc\right)\left(a+b\right)\le 2c+2cab$$

מספיק להראות כי $\left(c+ab\right)\left(a+b\right)\le 2+2ab$

$$0\le 2\left(a-1\right)\left(b-1\right)+\left(2-c-ab\right)\left(a+b\right)$$

$$0\le 2\left(a-1\right)\left(b-1\right)+\frac{\left(a-b\right)^2}{2+c}\left(a+b\right)$$

$$2\left(a-1\right)\left(1-b\right)\le \frac{\left(a-b\right)^2}{2+c}\left(a+b\right)$$

$$2\left(a-1\right)\left(1-b\right)\overset{(AM-GM)}{\le}\frac{\left(a-1+1-b\right)^2}{2}=\frac{\left(a-b\right)^2}{2}$$

נשאר להראות כי $\frac{\left(a-b\right)^2}{2}\le\frac{\left(a-b\right)^2}{2+c}\left(a+b\right)$.

מספיק להראות כי $\frac{2+c}{2}\le a+b$. כבר ראינו כי $c\le 1$ כלומר מספיק הראות כי $\frac{3}{2}\le a+b$. אנו נוכיח למעשה כי $2\le a+b$.

$$4=\left(a+b\right)^2+c^2+abc-2ab$$

צריך להראות כי $c^2+ab\left(c-2\right)\le 0$. היות ו-$c\le 1$, אז

$$c^2+ab\left(c-2\right)\le c^2-ab\le c^2-c^2=0$$

לכן אי-שוויון מוכן.