10. מספרים אי-שליליים a, b ו-c מקיימים $a+b+c+\sqrt{abc}=4$. הוכיחו כי $\sqrt{24a+25}+\sqrt{24b+25}+\sqrt{24c+25}\geq 21$.

פתרון. ננית בשלילה כי

$$\sqrt{24a+25}+\sqrt{24b+25}+\sqrt{24c+25}<21$$

נגדיל את a כך שיתקיים

$$(*)\quad \sqrt{24a+25}+\sqrt{24b+25}+\sqrt{24c+25}=21$$

אז כבר יתקיים $a+b+c+\sqrt{abc}>4$. מטרתנו היא להוכיח שזה בלתי אפשרי, כלומר בהינתן (*) נרצה להוכיח כי $a+b+c+\sqrt{abc}\leq 4$.

נבחר x אי-שלילי עבור $a=\frac{x(x+5)}{6}$, ובאופן דומה גם y ו-z.

אז $24a+25=4x^2+2\cdot 5\cdot 2x+25=(2x+5)^2$, ולכן האילוץ (*) הופך ל-

$$\sum_{cyc}(2x+5)=21$$

$$2(x+y+z)=6$$

$$x+y+z=3$$

כלומר האילוץ די פשוט, וצריך להוכיח אי-שוויון:

$$\sum_{cyc}\frac{x(x+5)}{6}+\sqrt{\prod_{cyc}\frac{x(x+5)}{6}}\leq 4$$

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{6}+\frac{5}{2}+\sqrt{\prod_{cyc}\frac{x(x+5)}{6}}\leq 4$$

$$\sqrt{\prod_{cyc}\frac{x(x+5)}{6}}\leq \frac{3}{2}+\sum_{cyc}\frac{x^2}{6}$$

$$\sqrt{\frac{1}{6}\prod_{cyc} x(x+5)} \le 9 - \sum_{cyc} x^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{6}\prod_{cyc} x(x+5)} \le (x+y+z)^2 - \sum_{cyc} x^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{6}\prod_{cyc} x(x+5)} \le 2\sum_{cyc} xy$$

$$\prod_{cyc} x(x+5) \le 24\left(\sum_{cyc} xy\right)^2$$

לשם כיצור, נסמן $Q = xy + xz + yz$

$$xyz(xyz + 5Q + 75 + 125) \le 24Q^2$$

$$xyz(xyz + 5Q + 200) \le 24Q^2$$

נשים לב כי $9xyz \le (xy + xz + yz)(x + y + z) \ge 3Q$, כלומר $3xyz \le Q$. נשאר

לכן $5xyzQ \le \frac{5}{3}Q^2$, ובנוסף גם $(xyz)^2 \le \frac{1}{9}Q^2$. נשאר להראות

$$200xyz \le \left(24 - \tfrac{5}{3} - \tfrac{1}{9}\right)Q^2 = \tfrac{180+36-15-1}{9}Q^2 = \tfrac{200}{9}Q^2$$

$$9xyz \le Q^2$$

נבצע הומוגניזציה: $3(x+y+z)xyz \le (xy+xz+yz)^2$.

אם נסמן $xy = Z$ ואז $3(XY + XZ + YZ) \le (X + Y + Z)^2$

וזה ידוע לקיפוד.