משוואה פונקציונאלית $f\left(f\left(x\right)+y\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+f\left(y\right)+3x^3y\left(f\left(x\right)+y\right)$.

הצבה $\left(0,0\right)$ נותנת $f\left(0\right)=0$.

הצבה $y=-f\left(x\right)$ נותנת $f\left(f\left(x\right)\right)=-f\left(-f\left(x\right)\right)$ (אי-זוגית על תמונה).

הצבה $f\left(y\right)$ במקום y נותנת ביטוי כמעת סימטרי. המחובר הלא סימטרי הוא

$$3x^3f\left(y\right)\cdot\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)$$

לכן הוא בעצם סימטרי, כלומר

$$3x^3f\left(y\right)=3y^3f\left(x\right) \text{ או } f\left(x\right)+f\left(y\right)=0$$

נציב $y=1$ במשוואה האחרונה ונקבל

$$(*)\quad f\left(x\right)=x^3f\left(1\right) \text{ או } f\left(x\right)+f\left(1\right)=0$$

נוכיח שהפונקציה חח"ע. נניח כי $f\left(x\right)=f\left(z\right)=F$ כאשר $x\neq z$.

נרשום את המשוואה המקורית לזוגות x,y ו-z,y, ונשווה. נקבל

$$3x^3y\left(F+y\right)=3z^3y\left(F+y\right)$$

עבור $y\neq -F,0$ נגיע לסתירה. אז f חח"ע.

נחזור לתנאי (*). מקבלים כי $f\left(x\right)=cx^3$ לכל הערכים של x פרט לערך אחד. אבל f חח"ע (ולכן גם $c\neq 0$), לכן גם בערך הנותר מתקיים התנאי $f\left(x\right)=cx^3$.

נשאר להציב והשוות מקדמים מתאימים בפולינום שיוצא. מתקבלות 2 תשובות.