תרגיל דיאופנטי

1. מצאו את כל זוגות של מספרים רציונאליים (x,y) עבורם $y^2 = x^3 - 3x + 2$.

2. הוכח כי למשוואה $x^2 + y^5 = z^3$ יש אינסוף פתרונות לא טריביאליים (כלומר $xyz \neq 0$) במספרים שלמים.

3. מצאו את כל השישיות של מספרים a,b,c,x,y,z טבעיים המקיימים

$$\begin{cases} a+b+c = xyz \\ x+y+z = abc \end{cases}$$

כאשר $a \le b \le c$, $x \le y \le z$.

4. מצאו את כל השלשות של מספרים שלמים (x,y,z) עבורן $x^4 - y^4 = z^2$.

5. כמה זוגות של מספרים רציונאליים (x,y) מקיימים

א. $x^3 + y^3 = 9$,

ב. $x^3 + y^3 = 2$.

6. כמה פתרונות טבעיים יש למספר $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$.

7. מצאו את כל הזוגות של מספרים ראשוניים p ו-q, כך שגם $p^q + q^p$ ראשוני.

8. נתונים מספרים שלמים $x > 2$, $y > 1$, $z > 0$ המקיימים $x^y + 1 = z^2$. נסמן ב-k את כמות המחלקים הראשוניים השונים של x, וב-ℓ את כמות המחלקים הראשוניים השונים של y. הוכיחו כי $k \ge \ell + 2$.

בהצלחה!